CAPITOLUL 1

PRIMITIVE

1.1 METODE GENERALE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

În acest paragraf vom reaminti noțiunea de primitivă, proprietățile primitivelor şi metodele generale de calcul ale acestora.

Definiția 1.1.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Funcția $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte primitivă a funcției f pe intervalul I, dacă F este derivabilă pe I şi*

$$F'(x) = f(x)\,,\ \ \forall\ x \in I.$$

Observația 1.1.1 Dacă F este o primitivă a lui f pe I, atunci oricare ar fi constanta reală C, funcția $G : I \to \mathbb{R}$ definită prin $G(x) = F(x) + C$, $\forall\ x \in I$, este de asemenea o primitivă a lui f pe I. Mai mult, orice altă primitivă a lui f pe I este de această formă.

Într-adevăr, dacă $G = F + C$, atunci $G' = F' = f$, deci G este o primitivă a lui f pe I.

Reciproc, fie G o altă primitivă a lui f pe I şi fie $H = G - F$.

Pentru orice $x \in I$ avem $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Fie acum $a \in I$ un punct interior fixat. Din Teorema lui Lagrange rezultă că pentru orice $x \in I$, există ξ în intervalul deschis de capete a şi x astfel încât:

$$H(x) - H(a) = H'(\xi)(x - a) = 0\,.$$

Dacă notăm cu $C = H(a)$, atunci $G(x) - F(x) = C$, $\forall\ x \in I$, deci $G = F + C$ pe I.

Definiția 1.1.2 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Mulțimea tuturor primitivelor funcției f pe I se notează cu $\int f \mathrm{d}x$ sau $\int f(x)\mathrm{d}x$ şi se numeşte integrala nedefinită a funcției f.*

Din Observația 1.1.1 rezultă că

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + \mathcal{C}\ ,\ \ \forall\ x \in I,$$

unde cu $\mathcal{C}$ am notat mulțimea tuturor funcțiilor constante pe I.

Observația 1.1.2 În capitolul următor se va arăta că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acest interval.

În continuare reamintim tabloul primitivelor funcțiilor elementare uzuale.

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathrm{C}\ ,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha\neq-1$$

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+\mathrm{C}\ ,\ x\in(0,\infty),\ \ \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+\mathrm{C}\ ,\ x\in(-\infty,0)$$

$$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}\ ,\ x\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq1,\ \ \int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}+\mathrm{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+\mathrm{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+\mathrm{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\int\frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\pi/2;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\int\frac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x=-\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$$

$$\int\frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{C}\ ,x\in\mathbb{R}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x+\mathrm{C}\ ,x\in(-1,1)$$

$$\int\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\,x+\mathrm{C}\ ,x\in\mathbb{R}$$

$$\int\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\,x+\mathrm{C}\ ,x\in\mathbb{R}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}\right)+\mathrm{C}\ \ ,x\in\mathbb{R}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=\begin{cases}\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}\right)+\mathrm{C}\ ,\ x\in(a,\infty)\\ \ln\left(-x-\sqrt{x^{2}-a^{2}}\right)+\mathrm{C}\ ,\ x\in(-\infty,-a)\end{cases}\ ,\quad a>0.$$

Propoziția 1.1.1 *Fie $f,\ g:I\to\mathbb{R}$ şi fie $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ oarecare. Dacă f şi g au primitive pe I, atunci $\alpha f+\beta g$ admite primitive pe I şi*

$$\int(\alpha f+\beta g)(x)\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Demonstrație.

Afirmația rezultă din proprietatea de linearitate a operației de derivare: $(\alpha F+\beta G)'=\alpha F'+\beta G'$.

Propoziția 1.1.2 *Fie $F:J\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f:J\to\mathbb{R}$ şi fie $u:I\to J$ o funcție derivabilă pe I. Atunci*

$$\int f\left[u(x)\right]u'(x)\mathrm{d}x = F\left[u(x)\right] + \mathrm{C} \ , \ \forall \ x \in I.$$

Demonstrația rezultă imediat din regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$\left(F\left[u(x)\right]\right)' = F'\left[u(x)\right]\cdot u'(x) = f\left[u(x)\right]\cdot u'(x) \ , \quad x \in I.$$

Observația 1.1.3 Din Propoziția 1.1.2 rezultă că pentru calculul primitivei funcției $\left(f \circ u\right)u'$ se poate proceda astfel:

Facem schimbarea de variabilă $t = u(x)$, $x \in I$. Funcția u este diferențiabilă pe I şi avem $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u(x) = u'(x)\mathrm{d}x$.

În continuare rezultă:

$$\int f\left[u(x)\right]\cdot u'(x)\mathrm{d}x = \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + \mathrm{C} \ = F\left[u(x)\right] + \mathrm{C} \ , \quad x \in I.$$

Precizăm că egalitatea $\int f\left[u(x)\right]u'(x)\mathrm{d}x = \int f(t)\mathrm{d}t$ este o egalitate formală. Într-adevăr, funcția din membrul stâng este definită pe J iar funcția din membrul drept pe I, deci cele două funcții nu sunt egale în sensul egalității funcțiilor.

Exemplul 1.1.1 Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$.

Dacă notăm $t = \dfrac{x}{a}$, atunci $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}t$ şi vom avea:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\mathrm{d}t}{t^2 + 1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathrm{C} \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

În mod analog se arată că

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + \mathrm{C} \ , \ \ x \in \left(-a, a\right), \ a > 0.$$

Propoziția 1.1.3 *Fie* $u : I \to J$ *o funcție bijectivă de clasă* C^1 *cu* $u'(x) \neq 0$, $\forall \ x \in I$ *şi* $f : J \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă. Dacă* $G : J \to \mathbb{R}$ *este o primitivă a funcției* $f \cdot \left(u^{-1}\right)' : J \to \mathbb{R}$ *atunci* $\int f\left[u(x)\right]\mathrm{d}x = G\left[u(x)\right] + \mathrm{C}$, $\forall \ x \in I$.

Demonstrație.

Deoarece $u^{-1}\left[u(x)\right] = x$, $\forall \ x \in I$, rezultă $\left(u^{-1}\right)'\left[u(x)\right]u'(x) = 1$, $\forall \ x \in I$. Aşadar avem:

$$\int f\left[u(x)\right]\mathrm{d}x = \int f\left[u(x)\right]\cdot\left(u^{-1}\right)'\left[u(x)\right]\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left[f\cdot\left(u^{-1}\right)'\right]\left[u(x)\right]\cdot u'(x)\mathrm{d}x \ .$$

Cum G este o primitivă a funcţiei $f\cdot\left(u^{-1}\right)'$, din Propoziţia 1.1.2 rezultă că $\int\left[f\cdot\left(u^{-1}\right)'\right][u(x)]\cdot u'(x)\mathrm{d}x = G[u(x)]+\mathsf{C}$.

Observaţia 1.1.4 Din Propoziţia 1.1.3 rezultă că pentru calculul primitivei $\int f[u(x)]\mathrm{d}x$, facem schimbarea de variabilă $t = u(x)$ şi acceptăm următorul calcul formal: $x=u^{-1}(t)$, $\mathrm{d}x=\left(u^{-1}\right)'(t)\mathrm{d}t$, $\int f[u(x)]\mathrm{d}x=\int f(t)\cdot\left(u^{-1}\right)'(t)\mathrm{d}t=G(t)+\mathsf{C}$ $= G[u(x)]+\mathsf{C}$.

Exemplul 1.1.2 Să se calculeze $\int \mathrm{tg}^4 x\,\mathrm{d}x$, $x\in(-\pi/2,-\pi/2)$.

Notăm $t = \mathrm{tg}x$, $x = \mathrm{arctg}\, t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$\int \mathrm{tg}^4 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}\,t+\mathsf{C} =$$
$$=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}-\mathrm{tg}\,x+x+\mathsf{C}\ .$$

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de metoda de integrare prin părţi.

Propoziţia 1.1.3 *Dacă f şi g sunt de clasă* C^1 *pe I, atunci*
$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x .$$

Demonstraţie.

Conform regulii de derivare a produsului a două funcţii, avem:
$$(fg)'=f'g+fg' .$$
Ţinând seama de Propoziţia 1.1.1 rezultă
$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(f(x)g(x)\right)'\mathrm{d}x-\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x .$$

Exemplul 1.1.3 Să se calculeze $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int x\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x .$$

Dacă notăm cu $f(x)=x$ şi $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, atunci

$f'(x)=1$, $g(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$ şi $\int x\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Aşadar $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, de rezultă că $2\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+\mathsf{C}$, deci

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\mathsf{C}\ .$$

În mod asemănător se arată că

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathsf{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

1.2. PRIMITIVELE FUNCŢIILOR RAŢIONALE

Prin funcţie raţională se înţelege un raport de două polinoame (funcţii polinomiale), adică o funcţie de forma: $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $x\in I$ unde P şi Q sunt polinoame şi $Q(x)\neq 0$, $\forall\ x\in I$. Dacă gradul lui P este mai mare sau egal cu gradul lui Q, efectuăm împărţirea şi obţinem:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},\ \text{unde } C \text{ este un polinom şi } \operatorname{grad}P_1<\operatorname{grad}Q\,.$$

De la cursul de algebră se ştie că raportul $\dfrac{P_1}{Q}$ admite următoarea descompunere (unică) în fracţii simple:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{A_{j1}}{x-a_j}+\frac{A_{j2}}{\left(x-a_j\right)^2}+\ldots+\frac{A_{jk_j}}{\left(x-a_j\right)^{k_j}}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+b_jx+c_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{\left(x^2+b_jx+c_j\right)^2}+\ldots+\frac{B_{jm_j}x+C_{jm_j}}{\left(x^2+b_jx+c_j\right)^{m_j}}\right].$$

unde $A_{ji},a_j,B_{ji},C_{ji},b_j,c_j$ sunt numere reale, $b_j^2-4c_j<0$, $j=\overline{1,n}$ şi $Q(x)=$ $=\left(x-a_1\right)^{k_1}\ldots\left(x-a_l\right)^{k_l}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{m_1}\ldots\left(x^2+b_nx+c_n\right)^{m_n}$ (Descompunerea în factori ireductibili a polinomului Q).

Aşadar, pentru a calcula primitiva unei funcţii raţionale este suficient să ştim să calculăm primitive de forma

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x, \text{ respectiv } \int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{d}x,\ b^2-4c<0,\ k\in\mathbb{N}^*.$$

Calculul primului tip de primitivă este imediat. Într-adevăr, pentru $k \neq 1$ avem $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + \mathcal{C}$, iar $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + \mathcal{C}$.

Pentru al doilea tip de primitivă procedăm astfel:

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}\right]^k}\,\mathrm{d}x.$$

Folosind notațiile $t = x+\frac{b}{2}$ şi $a^2 = \frac{4c-b^2}{4}$ obținem:

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2t}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t + \left(C-\frac{Bb}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Evident avem:

$$\int \frac{2t}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}, & \text{pentru } k\neq 1 \\ \ln\left(t^2+a^2\right), & \text{pentru } k=1. \end{cases}$$

Pentru cealaltă primitivă stabilim, în cazul $k > 1$, o relație de recurență:

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t\right).$$

Dacă notăm cu $f(t)=t$ şi $g'(t) = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k}$, atunci $f'(t)=t$ şi

$$g(t) = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} \text{ şi}$$

$$\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t = -\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}.$$

În continuare avem:

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}\right) \text{ sau}$$

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1} \right) \tag{1}$$

În cazul $k = 1$ avem $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \mathrm{C}$.

Exemplul 1.2.1 Să se calculeze primitiva funcţiei:

$$f(x) = \frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1}.$$

Este uşor de observat că polinomul de la numitor are rădăcina dublă $x = 1$ şi admite descompunerea $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1=(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2$.

Din teorema împărţirii rezultă:

$$f(x) = x + \frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}, \text{ deci}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x .$$

Funcţia de sub semnul integrală o descompunem în fracţii simple astfel:

$$\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Dacă amplificăm ambii membri ai acestei egalităţi cu $(x-1)^2$ şi apoi dăm lui x valoarea 1, rezultă $B = -1$. În continuare, trecem în membrul stâng termenul $\frac{-1}{(x-1)^2}$, aducem la acelaşi numitor şi simplificăm cu $x - 1$. Rezultă:

$$\frac{x^4+x^3-2x^2+x-1}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Amplificând ultima egalitate cu $x - 1$ şi dând apoi lui x valoarea 1 obţinem $A = 1$. Trecem în membrul stâng termenul $\frac{1}{x-1}$, aducem la acelaşi numitor şi simplificăm cu $x - 1$. Rezultă:

$$\frac{x^2+x+2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2} \text{ sau}$$

$$x^2+x+2 = Cx^3+Dx^2+(C+E)x+D+F .$$

Se obține astfel sistemul: $C = 0$, $D = 1$, $C + E = 1$, $D + F = 2$, care admite soluția: $C = 0$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 1$.

Aşadar, avem:

$$\int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2\left(x^2+1\right)} + I_2 .$$

Din (1) rezultă:

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x .$$

În final avem:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \mathrm{C} .$$

1.3 PRIMITIVE DE FORMA: $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$

Fie $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ o funcție rațională de două variabile, unde $P(u,v) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}u^i v^j$ şi $Q(u,v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{l} b_{ij}u^i v^j$ sunt două polinoame de două variabile.

Presupunem că $I \subset (-\pi, \pi)$ este un interval şi $Q(\sin x, \cos x) \neq 0$, $\forall\ x \in I$.

Pentru calculul primitivei de forma $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ facem schimbarea de variabilă: $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $x \in I$. Inversând funcția, obținem $x = 2\operatorname{arctg} t$ şi $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Pe de altă parte avem:

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} \quad \text{şi} \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} .$$

În urma acestei schimbări de variabilă rezultă:

$$\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde R_1 este o funcție rațională în *t*.

Observația 1.3.1 Intervalul *I* se poate înlocui cu orice alt interval *J* pe care funcția $x \to \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este strict monotonă şi $Q(\sin x, \cos x) \neq 0$, $\forall\ x \in J$.

Exemplul 1.3.1 Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ şi obținem:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x} = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{3t^2+2t+3} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + \mathrm{C}.$$

În continuare, prezentăm trei cazuri particulare, în care se pot face alte schimbări de variabile, ce conduc la calculul unor primitive de funcții raționale mai simple decât cele obținute în urma schimbării de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

1. $R(\cos x, \sin x) = R_1\left(\cos^2 x, \sin^2 x\right)$ sau $R_2(\operatorname{tg} x)$, unde R_1 (respectiv R_2) sunt funcții raționale.

Presupunem în plus că $I \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $Q(\cos x, \sin x) \neq 0$, $\forall\ x \in I$. În acest caz, se face schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} x$.

Inversând funcția, obținem $x = \operatorname{arctg} t$ şi $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

De la trigonometrie se ştie că:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad \text{şi} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Aşadar, în urma acestei schimbări de variabile obținem:

$$\int R_1\left(\cos^2 x,\, \sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int R_1\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

respectiv $$\int R_2\left(\operatorname{tg} x\right)\mathrm{d}x = \int R_2(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

În ambele cazuri problema s-a redus la calculul unor primitive de funcții raționale în t.

Exemplul 1.3.2 Să se calculeze $\int \frac{1}{2+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pentru început observăm că:

$$\int \frac{1}{2+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+\operatorname{tg} x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă: $x = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem:

$$\int \frac{1}{2+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+1}{2t^2+t+2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+t+2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{15}} + \mathrm{C}\,.$$

2) $R\left(\cos x,\, \sin x\right) = R_1\left(\cos^2 x,\, \sin x\right)\cos x$, $x \in I$, unde R_1 este de asemenea, o funcție rațională de două variabile.

În acest caz facem schimbarea de variabilă $\sin x = t$. Rezultă $\mathrm{d}t = \cos x\, \mathrm{d}x$ și

$$\int R_1\left(\cos^2 x,\, \sin x\right)\cos x\,\mathrm{d}x = \int R_1\left(1-t^2, t\right)\mathrm{d}t = \int R_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exemplul 1.3.3 Să se calculeze $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$, $x \neq k\pi$. Dacă facem schimbarea de variabilă: $t = \sin x$, atunci $\mathrm{d}t = \cos x\, \mathrm{d}x$ și obținem:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \int \frac{\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t}{t^4} = \int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t} = -\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+\mathrm{C}\,.$$

3) $R\left(\cos x, \sin x\right) = R_1\left(\cos x, \sin^2 x\right)\sin x\,.$

În acest caz se recomandă schimbarea de variabilă $\cos x = t$.

Exemplul 1.3.4 Să se calculeze $\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x$. Dacă facem schimbarea de variabilă $\cos x = t$ obținem:

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \sin^2 x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \int t^2\left(1-t^2\right)\left(-\mathrm{d}t\right) = \int \left(t^4 - t^2\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + \mathrm{C} .$$

1.4 PRIMITIVE DE FORMA $\int R\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$

Pentru început observăm că printr-o schimbare de variabilă de forma $t = \alpha x + \beta$ se obține o primitivă de forma: $\int R_1\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$, $\int R_1\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$ sau $\int R_1\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Într-adevăr, dacă $a > 0$ și $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, atunci avem:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1} .$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$t = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right), \text{ atunci } x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\left(t-\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right),\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{d}t$$

și $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x = \int R\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\left(t-\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right), \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\cdot\sqrt{t^2+1}\right]\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{d}t =$$

$$= \int R_1\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)\mathrm{d}t .$$

Celelalte două forme se obțin în cazurile $a > 0$, $\Delta > 0$, respectiv $a < 0$, $\Delta > 0$.

Pentru primitivele de forma $\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$ se poate face una din următoarele schimbări de variabile:

$$\sqrt{t^2+1} = tu+1;\quad \sqrt{t^2+1} = tu-1;\quad \sqrt{t^2+1} = u \pm t .$$

Exemplul 1.4.1 Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Dacă facem schimbarea de variabilă $x + 1 = t$, rezultă

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{t^2+1}}.$$

Facem acum o nouă schimbare de variabilă: $\sqrt{t^2+1}=u-t$. Ridicând la pătrat şi efectuând calculele obținem:

$$t=\frac{u^2-1}{2u},\ \mathrm{d}t=\frac{u^2+1}{2u^2}\mathrm{d}u \text{ şi } \sqrt{t^2+1}=\frac{u^2+1}{2u}.$$

Aşadar, avem:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{u^2-1}{2u}-1+\frac{u^2+1}{2u}}\cdot\frac{u^2+1}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{\left(u^2+1\right)\mathrm{d}u}{u^2(u-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2(u-1)}=\frac{1}{2}\ln|u-1|+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=$$

$$=\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u|+\frac{1}{2u}+\mathrm{C} \quad \text{unde } u=t+\sqrt{t^2+1}=x+1+\sqrt{x^2+2x+2}.$$

Pentru primitive de forma $\int R\left(t,\sqrt{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$ se poate face una din următoarele schimbări de variabile: $\sqrt{t^2-1}=u(t-1)$; $\sqrt{t^2-1}=u(t+1)$; $\sqrt{t^2-1}=t-u$, iar pentru primitive de forma $\int R\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$, $\sqrt{1-t^2}=u(1-t)$; $\sqrt{1-t^2}=u(1+t)$; $\sqrt{1-t^2}=tu\pm 1$.

1.5. PRIMITIVE DE FORMA: $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p \mathrm{d}x$, $m,n,q\in Q$

Acest tip de primitive este cunoscut sub numele de integrale binome. Matematicianul rus P.L. Cebâşev a arătat că aceste primitive se pot calcula numai în următoarele 3 cazuri:

Cazul 1: $p\in\mathbb{Z}$.

Dacă notăm cu r numitorul comun al numerelor m şi n şi facem schimbarea de variabilă $x=t^r$ obținem:

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p \mathrm{d}x=\int t^{mr}\left(at^{nr}+b\right)^p\cdot rt^{r-1}\mathrm{d}t.$$

Deoarece $mr\in\mathbb{Z}$ şi $nr\in\mathbb{Z}$ rezultă că funcția de sub semnul integrală este rațională.

Exemplul 1.5.1 Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$, $x \in (0, \infty)$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int x^{-1/2}\left(x^{1/4}+1\right)^{-10}\mathrm{d}x .$$

Aşadar avem: $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{4}$ şi $p = -10 \in \mathbb{Z}$.

Cum $r = 4$ facem schimbarea de variabilă $x = t^4$ şi obţinem:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int \frac{4t^3\mathrm{d}t}{t^2\left(t+1\right)^{10}} = 4\int \frac{t}{\left(t+1\right)^{10}}\mathrm{d}t = 4\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+1\right)^{9}} - 4\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+1\right)^{10}} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t+1\right)^8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(t+1\right)^9} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + \mathcal{C} .$$

Cazul 2: $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $p \notin \mathbb{Z}$.

Dacă notăm $u = x^n$, $x > 0$, atunci $x = u^{\frac{1}{n}}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cdot u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$ şi

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}\left(au+b\right)^p u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}-1}\left(au+b\right)^p\mathrm{d}u .$$

În continuare facem schimbarea de variabilă $au+b=t^r$, unde r este numitorul lui p. Rezultă $u = \frac{1}{a}\left(t^r-b\right)$ şi

$$\int u^{\frac{m+1}{n}-1}\left(au+b\right)^p\mathrm{d}u = \int\left[\frac{1}{a}\left(t^r-b\right)\right]^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot t^{rp}\cdot\frac{r}{a}\cdot t^{r-1}\mathrm{d}t = \int R(t)\,\mathrm{d}t .$$

Cum $\frac{m+1}{n}-1 \in \mathbb{Z}$ şi $rp \in \mathbb{Z}$, rezultă că funcţia de sub semnul integralei este raţională în t.

Exemplul 1.5.2 Să se calculeze $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, $x \in (-1,1)$.

Avem $m = 3$, $n = 2$, deci $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$. Cum $p = -\frac{1}{2}$, vom face schimbarea de variabilă $1-x^2=t^2$. Rezultă $x = \sqrt{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ şi

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1-t^2\right)^{3/2}}{t} \cdot \frac{-t}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}\mathrm{d}t = \int\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t =$$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{3} - \sqrt{1-x^2} + C \ .$$

Cazul 3: $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$; $p \notin \mathbb{Z}$.

Se poate arăta, aşa cum s-a procedat şi în cazul 2, că dacă facem schimbarea de variabilă $\dfrac{ax^n + b}{x^n} = t^r$, $x \neq 0$, unde r este numitorul lui p, problema se reduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale.

Exemplul 1.5.3 Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$, $x > 0$.

Avem $m = -2$; $n = 2$ şi $p = 3/2$. Evident $\dfrac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbb{Z}$. Facem schimbarea de variabilă $1 + x^2 = t^2x^2$, $x > 0$ şi obţinem $x = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$,

$$\mathrm{d}x = \frac{-t}{\left(t^2-1\right)^{3/2}}\mathrm{d}t \ , \ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int \left(t^2-1\right)\frac{\left(t^2-1\right)^{3/2}}{t^3} \cdot \frac{-t}{\left(t^2-1\right)^{3/2}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} - t = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C \ .$$

În încheierea acestui capitol, prezentăm o listă de primitive care nu se pot exprima prin funcţii elementare.

$$E_i(x) = \int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x \ ; \quad S_i(x) = \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \ ; \quad C_i(x) = \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x \ ; \quad \mathrm{Sh}_i(x) = \int \frac{\mathrm{sh}x}{x}\mathrm{d}x \ ;$$

$$\mathrm{Ch}_i(x) = \int \frac{\mathrm{ch}x}{x}\mathrm{d}x \ ; \qquad S(x) = \int \sin x^2 \,\mathrm{d}x \ ; \qquad C(x) = \int \cos x^2 \,\mathrm{d}x \ ; \qquad \phi(x) = \int e^{-x^2}\mathrm{d}x \ ;$$

$$L_i(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} \ .$$

CAPITOLUL 2

INTEGRALA RIEMANN

2.1 SUME DARBOUX. CRITERIUL DE INTEGRABILITATE DARBOUX

Definiția 2.1.1 *Se numeşte diviziune a intervalului* $[a, b]$ *orice submulțime* $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ *astfel încât*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b \ .$$

Numărul $\|\Delta\| = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$ se numeşte norma diviziunii Δ. Spunem că diviziunea Δ' este mai fină decât diviziunea Δ şi notăm $\Delta \prec \Delta'$ dacă Δ' conține pe lângă punctele diviziunii Δ şi alte puncte.

În continuare, pentru orice funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, mărginită, notăm cu:

$m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$,

$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

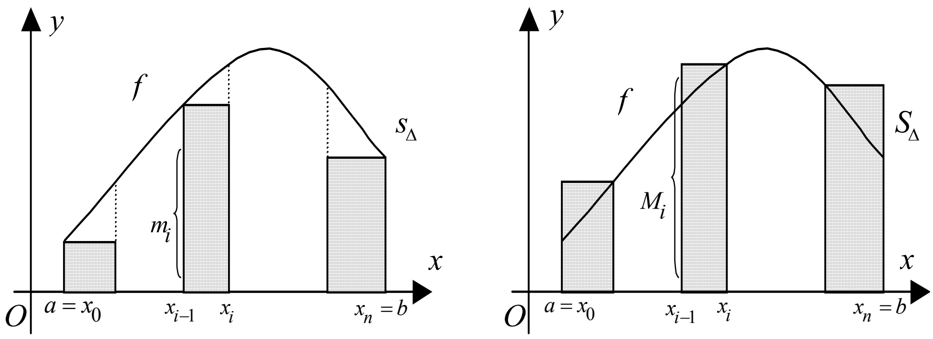
Evident au loc inegalitățile:

$$m \le m_i \le M_i \le M \ , \ \ \forall \ \ i = \overline{1,n} \tag{1}$$

Suma Darboux inferioară (superioară) se defineşte astfel:

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \text{ respectiv } S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Din punct de vedere geometric, aceste sume reprezintă ariile evidențiate în figură.



Din (1) rezultă că pentru orice diviziune Δ avem:

$$m(b-a) \le s_\Delta \le S_\Delta \le M(b-a) \quad (2)$$

Lema 21.1 *Dacă* $\Delta \prec \Delta'$, atunci $s_\Delta \le s_{\Delta'} \le S_{\Delta'} \le S_\Delta$.

Demonstrație.

Fie Δ : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Presupunem că diviziunea Δ' conține pe lângă punctele diviziunii Δ, un singur punct în plus şi anume, punctul c, situat între x_{i-1} şi x_i.

Fie $m_i' = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, c]\}$ şi $m_i'' = \inf\{f(x); x \in [c, x_i]\}$.

Deoarece $m_i \le m_i'$ şi $m_i \le m_i''$, rezultă

$$s_{\Delta'} - s_\Delta = m_i'(c - x_{i-1}) + m_i''(x_i - c) - m_i(x_i - x_{i-1}) \ge$$
$$\ge m_i(c - x_{i-1} + x_i - c) - m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 .$$

Aşadar, am arătat că $s_\Delta \le s_{\Delta'}$. Evident, dacă presupunem că diviziunea Δ' conține pe lângă punctele diviziunii Δ mai multe puncte (distincte) $c_1, \ldots, c_p$, raționamentul este asemănător.

Demonstrația inegalității $S_{\Delta'} \le S_\Delta$ este analoagă şi rămâne în seama cititorului.

Lema 2.1.2 *Pentru orice două diviziuni* Δ' *şi* Δ'' *ale intervalului* $[a, b]$, *avem* $s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$.

Demonstrație.

Fie $\overline{\Delta} = \Delta' \cup \Delta''$ diviziunea care constă din reuniunea punctelor diviziunilor Δ' şi Δ''. Evident avem $\Delta' \prec \overline{\Delta}$ şi $\Delta'' \prec \overline{\Delta}$. Din Lema 2.1.1 rezultă: $s_{\Delta'} \le s_{\overline{\Delta}} \le S_{\overline{\Delta}} \le S_{\Delta'}$.

Din inegalitățile (2) rezultă că mulțimea de numere reale $\{s_\Delta\}_\Delta$ este majorată de numărul $M(b - a)$, iar mulțimea de numere reale $\{S_\Delta\}_\Delta$ este minorată de numărul $m(b - a)$.

Notăm cu $I_* = \sup\limits_\Delta s_\Delta$ şi cu $I^* = \inf\limits_\Delta S_\Delta$. I^* se numeşte integrala superioară iar I_* se numeşte integrala inferioară.

Lema 2.1.3 $I_* \le I^*$.

Demonstrație. Din Lema 2.1.2 rezultă că: $s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$, oricare ar fi diviziunile Δ' şi Δ''. Fixând pentru moment diviziunea Δ'' obținem: $I_* = \sup\limits_{\Delta'} s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$. Cum Δ'' a fost arbitrară, în continuare avem $I_* \le \inf\limits_{\Delta''} S_{\Delta''} = I^*$.

Definiția 2.1.2 *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcție mărginită. Spunem că* f *este* (D)-*integrabilă* (*integrabilă în sensul lui Darboux*) *pe* $[a, b]$ *dacă* $I_* = I^* = I$.

Valoarea comună I o notăm cu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lema 2.1.4 *Pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât oricare diviziune* Δ *a intervalului* $[a, b]$ *cu* $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ *avem:*

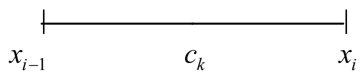
$$I_* - \varepsilon < s_\Delta \le S_\Delta < I^* + \varepsilon \tag{4}$$

Demonstrație.

Vom demonstra inegalitatea $I_* - \varepsilon < s_\Delta$, lăsând în seama cititorului demonstrația celeilalte inegalități. Deoarece $I_* = \sup\limits_{\Delta} s_\Delta$ rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$ există o diviziune Δ_0 a intervalului $[a, b]$ astfel încât: $I_* - \dfrac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_0}$.

Să presupunem că $\Delta_0 : a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k < \ldots < c_p = b$.

Fie $\mu = \min\limits_{1 \le k \le p} \left(c_k - c_{k-1}\right)$ şi fie $\Delta\ :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \mu$. Dacă notăm cu $\overline{\Delta} = \Delta_0 \bigcup \Delta$, atunci în intervalul $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ se află cel mult un punct c_k din diviziunea Δ_0.



Fie $m_i' = \inf\left\{f(x); x \in \left[x_{i-1}, c_k\right]\right\}$ şi $m_i'' = \inf\left\{f(x); x \in \left[c_k, x_i\right]\right\}$. Contribuția subintervalului $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ în diferența $s_{\overline{\Delta}} - s_\Delta$ va fi

$$m_i'\left(c_k - x_{i-1}\right) + m_i''\left(x_i - c_k\right) - m_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

şi este evident majorată de $\left(M - m\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$. Cum în diviziunea $\overline{\Delta}$ există ($p - 1$) puncte interioare c_k rezultă că avem următoarea majorare:

$$s_{\overline{\Delta}} - s_\Delta \le \left(p - 1\right)\left(M - m\right)\|\Delta\| \tag{5}$$

Fie acum $\delta_\varepsilon = \min\left\{\mu; \dfrac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right\}$, fie Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi fie $\overline{\Delta} = \Delta_0 \cup \Delta$. Cum $\delta_\varepsilon \le \mu$ rezultă că $\|\Delta\| < \mu$ şi conform (5) avem:

$$s_{\overline{\Delta}} - s_\Delta \le (p-1)(M-m)\|\Delta\| < (p-1)(M-m)\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aşadar avem $I_* - \dfrac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_0} \le s_{\overline{\Delta}} \le s_\Delta + \dfrac{\varepsilon}{2}$, deci $I_* - \varepsilon \le s_\Delta$.

Cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema 2.1.1 (Criteriul de integrabilitate al lui Darboux)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă pe $[a, b]$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, să avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Demonstrație.

Necesitatea. Presupunem că $I_* = I^* = I$. Din Lema 2.1.4 rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $I - \dfrac{\varepsilon}{2} < s_\Delta \le S_\Delta < I + \dfrac{\varepsilon}{2}$, pentru $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$. Evident, $S_\Delta - s_\Delta < \left(I + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$. Aşadar $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$ pentru orice Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Suficiența. Presupunem că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Deoarece $s_\Delta \le I_* \le I^* \le S_\Delta$, rezultă că $0 \le I^* - I_* \le S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, aceasta implică $I^* - I_* = 0$, deci *f* este integrabilă pe $[a, b]$.

2.2. CLASE DE FUNCȚII INTEGRABILE

Teorema 2.1.1 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este integrabilă pe* $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Deoarece, o funcție continuă pe un interval compact

este mărginită şi îşi atinge marginile rezultă că $\exists\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ şi $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel încât $m_i = f(\xi_i)$ şi $M_i = f(\eta_i)$. Aşadar, avem

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\xi_i)](x_i - x_{i-1}).$$

Pe de altă parte, *f* este uniform continuă pe [*a*, *b*], deci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in [a,b]$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Dacă presupunem acum că $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ rezultă $|\eta_i - \xi_i| \le x_i - x_{i-1} \le \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ deci

$$S_\Delta - s_\Delta < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Aşadar, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ (cel de la continuitatea uniformă) astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$. Din Teorema 2.1.1 rezultă că *f* este integrabilă pe [*a*, *b*].

Teorema 2.2.2 *Dacă f* : [*a*, *b*] → ℝ *este monotonă, atunci f este integrabilă pe* [*a*, *b*].

Demonstraţie.

Vom face demonstraţia pentru cazul când *f* este crescătoare şi nu se reduce la o constantă. Cazul când *f* este descrescătoare se tratează asemănător. Dacă *f* se reduce la o constantă, adică $f(x) = c$, $\forall\ x \in [a,b]$, atunci $s_\Delta = S_\Delta = c(b-a)$, $\forall\ \Delta$ deci $I_* = I^* = c(b-a)$.

Fie deci *f* crescătoare, astfel încât $f(a) < f(b)$ şi fie

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului [*a*, *b*]. Deoarece *f* este crescătoare, avem $m_i = f(x_{i-1})$ şi $M_i = f(x_i)$, deci

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi fie $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Dacă presupunem că $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, atunci vom avea $S_\Delta - s_\Delta < \delta_\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}[f(b) - f(a)] = \varepsilon$.

Aşadar, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$. Din Teorema 2.1.1 rezultă că *f* este integrabilă pe [*a*, *b*].

2.3. SUME RIEMANN. CRITERIUL DE INTEGRABILITATE RIEMANN

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului [*a*, *b*] şi $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ un punct oarecare. Dacă notăm cu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, atunci suma Riemann asociată funcţiei *f*, diviziunii Δ şi punctelor intermediare ξ_i, se notează cu $\sigma_\Delta(f;\xi)$ şi este prin definiţie

$$\sigma_\Delta(f;\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiţia 2.3.1 *Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$. Spunem că f este (R)-integrabilă (integrabilă în sensul lui Riemann) pe [a, b] dacă există un număr finit I, astfel încât ∀ ε > 0, ∃ $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi diviziunea Δ, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi punctele intermediare $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, avem $\left|\sigma_\Delta(f;\xi) - I\right| < \varepsilon$.*

Teorema 2.3.1 *Dacă f este (R)-integrabilă pe [a, b], atunci f este mărginită pe [a, b].*

Demonstraţie.

Prin ipoteză, există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru $\varepsilon = 1$, există $\delta_1 > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi Δ cu $\|\Delta\| < \delta_1$ şi oricare ar fi punctele intermediare ξ_i avem:

$$I - 1 < \sigma_\Delta(f;\xi) < I + 1 \tag{1}$$

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ cu $\|\Delta\| < \delta_1$ şi fie $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Presupunem prin absurd că *f* nu este mărginită pe [*a*, *b*]. Atunci, există un subinterval $[x_{j-1}, x_j]$ astfel încât *f* nu este mărginită pe $[x_{j-1}, x_j]$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $\sup\left\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\right\} = +\infty$. Cum *f* nu este mărginită superior pe intervalul $[x_{j-1}, x_j]$, rezultă că există $\overline{\xi}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ astfel încât

$f(\overline{\xi}_j) > \dfrac{I - s + 1}{x_j - x_{j-1}}$, unde am notat cu $s = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Fie $\overline{\xi}_i = \begin{cases} \xi_i & \text{dacă } i \neq j \\ \overline{\xi}_i & \text{dacă } i = j \end{cases}$ şi $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)$. Rezultă

$$\sigma_\Delta\left(f;\overline{\xi}\right)=s+f\left(\overline{\xi}_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)>s+\frac{I-s+1}{x_j-x_{j-1}}\left(x_j-x_{j-1}\right)=I+1$$

Aşadar $\sigma_\Delta\left(f;\overline{\xi}\right)>I+1$ ceea ce contrazice (1). Prin urmare, ipoteza că *f* nu e mărginită pe [*a*, *b*] ne conduce la o contradicţie.

Următoarea teoremă ne arată că cele două definiţii ale integrabilităţii sunt echivalente.

Teorema 2.3.2 *Fie f* : [*a*, *b*] $\to \mathbb{R}$ *mărginită. Atunci f este* (*D*)*-integrabilă pe* [*a*, *b*] *dacă şi numai dacă f este* (*R*)*-integrabilă pe* [*a*, *b*].

Demonstraţie.

Dacă *f* este (*D*)-integrabilă pe [*a*, *b*], atunci $I_*=I^*=I$. Pe de altă parte, din Teorema 2.1.1. rezultă că $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta-s_\Delta<\varepsilon$.

Cum $s_\Delta\le I\le S_\Delta$ şi $s_\Delta\le\sigma_\Delta\left(f,\xi\right)\le S_\Delta$, $\forall\,\xi$, rezultă că $\left|\sigma_\Delta\left(f,\xi\right)-I\right|<\varepsilon$ pentru orice Δ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ şi orice puncte intermediare ξ_i, deci *f* este (*R*)-integrabilă.

Reciproc, să presupunem că *f* este (*R*)-integrabilă. Atunci există $I\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ şi $\forall\,\xi$ avem:

$$I-\frac{\varepsilon}{4}<\sigma_\Delta\left(f;\xi\right)<I+\frac{\varepsilon}{4} \tag{2}$$

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$. Deoarece $M_i=\sup\left\{f(x);x\in\left[x_{i-1},x_i\right]\right\}$, rezultă că există $\alpha_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ astfel încât

$$M_i-\frac{\varepsilon}{4\left(b-a\right)}<f\left(\alpha_i\right) \tag{3}$$

Amplificând inegalitatea (3) cu $\left(x_i-x_{i-1}\right)$ şi sumând rezultă:

$$S_\Delta-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^{n}f\left(\alpha_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sigma_\Delta\left(f;\alpha\right),\text{ unde }\alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right).$$

Ţinând seama acum şi de (2) obţinem:

$$S_\Delta<I+\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

În mod asemănător se arată că

$$s_\Delta>I-\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă că $S_\Delta-s_\Delta<\varepsilon$, pentru orice Δ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$, deci *f* este (*D*)-integrabilă, conform Teoriei 2.1.1.

Teorema 2.3.3 (Criteriul de integrabilitate al lui Riemann)

Condiția necesară și suficientă ca $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *să fie integrabilă pe* $[a, b]$, *este să existe un număr finit I, astfel încât pentru orice șir de diviziuni* $\{\Delta_n\}$ *ale intervalului* $[a, b]$ *cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ *și orice alegere a punctelor intermediare* $\xi^{(n)}$ *să avem* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right) = I$.

Demonstrație.

Necesitatea. Prin ipoteză există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall\ \xi$ avem $\left|\sigma_\Delta(f;\xi) - I\right| < \varepsilon$.

Fie $\{\Delta_n\}$ un șir de diviziuni cu $\|\Delta_n\| \to 0$. Atunci $\exists$ un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|\Delta_n\| < \delta_\varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$. Conform ipotezei avem $\left|\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^{(n)}\right) - I\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ și orice set de puncte intermediare $\xi^{(n)}$ corespunzător diviziunii Δ_n. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right) = I$.

Suficiență. Presupunem că există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice șir de diviziuni $\{\Delta_n\}$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$ și orice set de puncte intermediare $\xi^{(n)}$ avem
$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right) = I$.

Presupunem prin absurd că *f* nu este integrabilă, deci că oricare ar fi numărul finit *I*, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ \Delta_\delta$ cu $\|\Delta_\delta\| < \delta$ și există un set de puncte intermediare ξ^δ astfel încât $\left|\sigma_{\Delta_\delta}\left(f,\xi^\delta\right) - I\right| \geq \varepsilon_0$.

În particular, pentru $\delta = \dfrac{1}{n}$ rezultă că $\exists\ \Delta_n$ cu $\|\Delta_n\| < \dfrac{1}{n}$ și $\xi^{(n)}$ astfel încât $\left|\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^{(n)}\right) - I\right| \geq \varepsilon_0$. Aceasta înseamnă că $\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^{(n)}\right) \not\to I$, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Definiția 2.3.2 *Spunem că o mulțime* $A \subset \Upsilon$ *este neglijabilă* (*de măsură Lebesque nulă*), dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ *un șir de intervale deschise* $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ *cu următoarele proprietăți* :

a) $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l\left(I_n\right) < \varepsilon$, *unde cu* $l\left(I_n\right)$ *am notat lungimea intervalului* I_n.

Precizăm că unele din intervalele I_n pot să fie mulțimea vida $\varnothing$.

Propoziția 2.3.1. *Orice mulțime care se reduce la un punct este neglijabilă*

Demonstrație.

Fie $A = \{x_0\}$. Putem alege $I_1 = \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ şi $I_n = \varnothing$ pentru $n \geq 2$. Evident $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$.

Următoarea afirmație este evidentă:

Propoziția 2.3.2 *Dacă $A \subset B$ şi B este neglijabilă, rezultă că A este neglijabilă.*

Propoziția 2.3.3 *O reuniune numărabilă de mulțimi neglijabile este de asemenea neglijabilă.*

Demonstrație.

Fie $A_n \subset \mathbb{R}^2$ neglijabilă, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ un şir de intervale deschise $\left(I_{nm}\right)_{m\geq 1}$ cu proprietățile: $A \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{nm}$ şi $\sum\limits_{m=1}^{\infty} l\left(I_{nm}\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

În continuare avem: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{nm}\right)$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} l\left(I_{nm}\right) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, deci, mulțimea $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ este neglijabilă.

Corolarul 2.3.1 *Orice mulțime finită sau numărabilă din ϒ este neglijabilă.*

Afirmația rezultă din Propozițiile 2.3.1 şi 2.3.3.

În continuare prezentăm fără demonstrație următoarea teoremă.

Teorema 2.3.4 (Criteriul de integrabilitate al lui Lebesque)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Condiția necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă pe $[a, b]$ este ca f să fie mărginită pe $[a, b]$ şi mulțimea punctelor sale de discontinuitate să fie neglijabilă.

2.4. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI RIEMANN

2.4.1. $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a$.

Afirmația rezultă imediat din observația că orice sumă Riemann $\sigma_\Delta(1;\xi) = b - a$

2.4.2. Proprietatea de linearitate

Dacă *f*, *g* : [*a*, *b*] → ℝ sunt integrabile, atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe [*a*, *b*] și

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

Demonstrație.

Fie $\{\Delta_n\}$ un şir de diviziuni cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și fie $\xi^{(n)}$ un set de puncte intermediare oarecare pentru diviziunea Δ_n. Avem:

$$\sigma_{\Delta_n}\left(\alpha f + \beta g; \xi^{(n)}\right) = \alpha \sigma_{\Delta_n}\left(f; \xi^{(n)}\right) + \beta \sigma_{\Delta_n}\left(g; \xi^{(n)}\right).$$

Deoarece membrul drept are limită finită când $n \to \infty$ şi anume $\alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, rezultă că și membrul stâng are limită finită, deci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă și în plus $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

2.4.3. Proprietatea de monotonie

Dacă *f* și *g* sunt integrabile pe [*a*, *b*] și $f(x) \le g(x)$, ∀ *n* ∈ [*a*, *b*], atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Afirmația rezultă imediat din observația că $\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]\mathrm{d}x \ge 0$ și din proprietatea de linearitate a integralei Riemann.

2.4.4. Dacă *f* este integrabilă pe [*a*, *b*], atunci |*f*| este integrabilă pe [*a*, *b*] și $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Fie *A* mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției | *f* | din intervalul [*a*, *b*] și *B* mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui *f* din intervalul [*a*, *b*]. Se știe că dacă *f* este continuă într-un punct, atunci | *f* | este continuă în acel punct. Așadar, avem $A \subset B$. Conform Teoremei 2.3.4, *B* este neglijabilă. Rezultă atunci că și *A* este neglijabilă, deci că |*f*| este integrabilă.

Pe de altă parte avem:

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Din Proprietatea 3) de monotonie a integralei, rezultă că

$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ deci $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

2.4.5. Dacă *f* şi *g* sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci *fg* este integrabilă pe $[a, b]$. Într-adevăr, fie *A*/*B*/*C* mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui *f* /*g*/ *fg*. Se ştie că dacă *f* şi *g* sunt continue într-un punct, atunci *fg* este continuă în acest punct. Rezultă că $C \subset A \cup B$. Cum *A* şi *B* sunt neglijabile, rezultă că $A \cup B$ este neglijabilă, deci *C* este neglijabilă. Conform Teoremei 2.3.4 rezultă că *fg* este continuă pe $[a, b]$.

2.4.6. Teorema de medie

Fie *f* şi *g* două funcţii integrabile pe $[a, b]$. Presupunem că *g* păstrează semn constant pe $[a, b]$. Dacă notăm cu $m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$ şi cu $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$, atunci există $m \le \mu \le M$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Demonstraţie.

Presupunem că $g(x) \ge 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Deoarece $m \le f(x) \le M$, $\forall\ x \in [a, b]$ rezultă $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Din Proprietăţile 2) şi 3) avem

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (2)$$

Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, atunci şi $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ şi egalitatea (1) are loc pentru orice $\mu \in \mathbb{R}$.

Să presupunem că $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ne 0$. Cum $g \ge 0$ rezultă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Împărţind inegalitatea (2) cu $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ obţinem: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M$.

Dacă notăm cu $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$, rezultă că $m \le \mu \le M$, deci

$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corolarul 2.4.1 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă şi $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă. Dacă g păstrează semn constant pe [a, b], atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

Demonstraţie.

Deoarece f este continuă pe [a, b], rezultă că există α, $\beta \in$ [a, b] astfel încât $m = f(\alpha)$ şi $M = f(\beta)$. Din Teorema de medie, ştim că există $m \le \mu \le M$ astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Pe de altă parte, f are proprietatea Darboux pe [a, b], deci există ξ între α şi β, deci în [a, b], astfel încât $\mu = f(\xi)$. Aşadar avem

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

Corolarul 2.4.2 *Dacă f: [a, b] $\to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci există $m \le \mu \le M$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.*

Afirmaţia rezultă imediat din Teorema de medie pentru cazul particular când $g = 1$.

Corolarul 2.4.3 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.*

Afirmaţia rezultă imediat din Corolarul 2.4.1, pentru cazul particular când $g = 1$.

2.4.7. Dacă f este integrabilă pe [a, b] şi $a < c < b$, atunci f este integrabilă pe [a, c] şi [c, b] şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Demonstraţie.

Faptul că f este integrabilă pe [a, b] şi [c, b] rezultă imediat din Teorema 2.3.4.

Fie $\{\Delta'_n\}$ un şir de diviziuni ale intervalului [a, c] cu $\|\Delta'_n\| \to 0$ şi fie $\{\Delta''_n\}$ un şir de diviziuni ale intervalului [c, b] cu $\|\Delta''_n\| \to 0$. Dacă notăm cu $\Delta_n = \Delta'_n \cup \Delta''_n$, atunci Δ_n este o diviziune a intervalului [a, b] şi $\|\Delta_n\| \to 0$.

Fie de asemenea $\alpha^{(n)}\left(\beta^{(n)}\right)$ un set de puncte intermediare pentru diviziunea Δ'_n (respectiv Δ''_n). Dacă notăm cu $\xi^{(n)} = \alpha^{(n)} \cup \beta^{(n)}$, atunci $\xi^{(n)}$ este un set de puncte intermediare pentru Δ_n.

Trecând la limită după n în egalitatea

$\sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right)=\sigma_{\Delta'_n}\left(f;\alpha^{(n)}\right)+\sigma_{\Delta''_n}\left(f;\beta^{(n)}\right)$, rezultă că

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Următoarea teoremă ne asigură că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.

Teorema 2.4.8 *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă și fie* $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x\in[a,b]$. *Atunci f este derivabilă pe* (a,b) și $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in(a,b)$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in(a,b)$ oarecare. Să observăm pentru început că $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-$ $-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Într-adevăr, dacă $x_0<x$ atunci afirmația rezultă din egalitatea $\int_a^x=\int_a^{x_0}+\int_{x_0}^x$. Dacă $x<x_0$, atunci $\int_a^{x_0}=\int_a^x+\int_x^{x_0}$ deci $\int_a^x-\int_a^{x_0}=-\int_x^{x_0}=\int_{x_0}^x$.

Așadar, avem $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-x_0}$.

Conform Corolarului 2.4.3 rezultă că $\exists\ \xi$ în intervalul închis de capete x_0 și x astfel încât $\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)(x-x_0)$. Cum f este continuă în x_0, în continuare avem:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(\xi)=f(x_0),\ \text{deci}\ \ F'(x_0)=f(x_0).$$

Teorema 2.4.9 (Leibniz-Newton)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă. Dacă F este o primitivă a lui f pe $[a,b]$*, atunci* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Demonstrație.

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_n=b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a,b]$. Observăm că $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]$.

Pe de altă parte, din Teorema Lagrange rezultă că există $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ astfel încât:

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Dacă notăm cu $\xi=\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$ obținem:

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sigma_\Delta\left(f;\xi\right).$$

Fie $\left\{\Delta_n\right\}$ un şir de diviziuni de normă tinzând la zero şi fie $\xi^{(n)}$ setul de puncte intermediare pentru Δ_n care rezultă din Teorema Lagrange. Rezultă:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right)=F(b)-F(a),$$

CAPITOLUL 3

INTEGRALE GENERALIZATE ŞI CU PARAMETRU

3.1. INTEGRALE GENERALIZATE

Teoria integralei definite s-a făcut pentru funcţii mărginite, definite pe intervale mărginite. În cele ce urmează vom da un sens unor integrale de forma $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ sau $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, unde b este finit şi f este nemărginită pe $[a, b]$. Vom trata ambele cazuri unitar.

Definiţia 3.1.1 *Fie* $f : [a, b) \to \Upsilon$, *b finit sau nu. Presupunem că f este integrabilă pe intervalul compact* $[a, u]$, *oricare* $a < u < b$. *Dacă există* $\lim\limits_{u \to b} \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ *şi e finită, spunem că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă şi notăm cu* $(v)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u \to b} \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$. *În caz contrar, dacă limita nu există sau e infinită, spunem că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este divergentă.*

Exemplul 3.1.1 Să se studieze convergenta integralei $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$. Avem

$$\int_1^u \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \ln u & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \dfrac{u^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{dacă } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Observăm că dacă $\alpha > 1$, atunci $(v)\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \frac{-1}{1-\alpha}$, deci $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ este convergentă şi dacă $\alpha \leq 1$, atunci $\lim\limits_{u\to\infty} \int_1^u \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \infty$, deci $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ este divergentă. În particular, $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ este convergentă şi $(v)\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$, în timp ce $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ este divergentă.

Exemplul 3.1.2 Să se studieze convergența integralei: $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ unde b este finit.

$$\int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \ln\frac{b-u}{b-a} & \text{dacă } \alpha=1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-u)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right] & \text{dacă } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Observăm că dacă $\alpha < 1$ atunci

$$(v)\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \lim_{u \nearrow b}\int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

iar dacă $\alpha \geq 1$, $\lim\limits_{u \nearrow b}\int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = -\infty$. Așadar, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ și divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

În particular, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b-x}}$ este convergentă și $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)\sqrt{b-x}}$ este divergentă.

Observația 3.1.1 Fie $f : (a, b] \to \Upsilon$, a finit sau nu. Presupunem că f este integrabilă pe intervalul $[u, b]$, oricare ar fi $a < u < b$. Notăm cu $(v)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ $= \lim\limits_{u \searrow a}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$, dacă această limită există și e finită, și spunem că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă. În caz contrar, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă. Procedând ca în exemplul 3.1.2 rezultă că $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$, unde a este finit, este convergentă pentru $\alpha < 1$ și divergentă pentru $\alpha \geq 1$. De exemplu $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ este convergentă și $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ este divergentă.

Teorema 3.1.1 *Fie $f : [a, b) \to \Upsilon$, b finit sau nu. Dacă f este integrabilă pe $[a, u]$ oricare ar fi $a < u < b$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă și numai dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ pentru orice $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$.*

Demonstrație.

Pentru orice $a < u < b$ notăm cu $F(u) = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$. Conform Definiției 3.1.1, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă există $L = \lim\limits_{u \nearrow b} F(u)$ şi e finită. Pe de altă parte, din Teorema Cauchy-Balzano rezultă că existența acestei limite finite este echivalentă cu faptul că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ o vecinătate V_ε a lui b astfel încât $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$ pentru orice $u', u'' \in V_\varepsilon \bigcap [a,b)$. Dacă b este finit, putem presupune că V_ε este de forma $(b - \eta_\varepsilon, b + \eta_\varepsilon)$ unde $a < b - \eta_\varepsilon < b$ şi alegem $\delta_\varepsilon = b - \eta_\varepsilon$. Dacă $b = +\infty$ putem presupune că V_ε este de forma $(\delta_\varepsilon, \infty)$ unde $a < \delta_\varepsilon < b$. În ambele situații, dacă $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ rezultă că $u', u'' \in V_\varepsilon \bigcap [a,b)$, deci că $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$. Pe de altă parte, se observă imediat că

$$|F(u') - F(u'')| = \left|\int_a^{u'} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

Aşadar, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă, dacă şi numai dacă pentru $\varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât pentru orice $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ avem $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Definiția 3.1.2 *Spunem că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este absolut convergentă dacă* $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Corolarul 3.1.1 *Dacă* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este absolut convergentă, atunci* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este convergntă.*

Demonstrație.

Afirmația rezultă din Teorema 3.1.1 şi din Observația că $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq$ $\leq \int_{u'}^{u''} |f(x)|\mathrm{d}x$.

Teorema 3.1.2 *Fie* $f, g : [a, b) \to \Upsilon_+$, *$b$ finit sau nu. Presupunem că f şi g sunt integrabile pe intervalul* $[a, u]$, *oricare ar fi* $a < u < b$ *şi că* $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a, b)$. *Atunci*

1) *Dacă* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *converge, rezultă că şi* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *converge.*

2) *Dacă* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *diverge, rezultă că şi* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *diverge.*

Demonstraţie.

Fie $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ şi $G(u)=\int_a^u g(x)\mathrm{d}x$, unde $a < u < b$. Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă că $0 \le F(u) \le G(u)$, $\forall\ a < u < b$.

F şi G sunt monoton crescătoare, deoarece f şi g iau valori în $\mathbb{R}_+$.

Dacă presupunem că $\int_a^u g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă rezultă că $(v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to b} G(u)$ există şi e finită şi $G(u) \le (v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Cum $F \le G$ rezultă că $F(u) \le (v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, $\forall\ a < u < b$. Faptul că F este monoton crescătoare şi mărginită superior pe $[a, b)$ implică că există $\lim_{u\to b} F(u) \le (v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, deci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge.

Dacă presupunem că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă, rezultă că $\lim_{u\to b} F(u) = +\infty$ şi cu atât mai mult $\lim_{u\to \infty} G(u) = +\infty$, deci $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ diverge.

Exemplul 3.1.3 Să se studieze convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Deoarece $\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\forall\ x \in [1, \infty)$ şi $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$ este convergentă, din Teorema 3.1.2 rezultă că $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ este convergentă.

Rezultă că $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă în virtutea Corolarului 3.1.1.

Observaţia 3.1.2 Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabilă pe fiecare interval compact închis în $[a, b)$ şi fie $a < c < b$. Atunci, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă. Într-adevăr, este suficient să observăm că pentru orice $c < u < b$, avem $\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^u f(x)\mathrm{d}x$, iar $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ este un număr finit, f fiind integrabilă pe $[a, c]$.

Teorema 3.1.3 *Fie* $f : [a, \infty) \to \Upsilon_+$, *integrabilă pe intervalul* $[a, u]$ *pentru orice* $a < u < b$. *Atunci*

1) *Dacă* $\exists\ \alpha > 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x)$ *există şi e finită rezultă că* $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

2) *Dacă* $\exists\ \alpha \le 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x)$ *există şi este strict pozitivă, rezultă că* $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *este divergentă.*

Demonstraţie.

Fie $\alpha > 1$ şi fie $l = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) < \infty$. Din definiţia limitei unei funcţii rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > a$ astfel încât $l - \varepsilon < x^{\alpha} f(x) < l + \varepsilon$ pentru orice $x > \delta_\varepsilon$. Aşadar, $f(x) < \dfrac{l+\varepsilon}{x^{\alpha}}$, pentru orice $x > \delta_\varepsilon$.

Cum $\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} \dfrac{l+\varepsilon}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ este convergentă în acest caz (Vezi Exemplul 3.1.1), din Teorema 3.1.2 rezultă că $\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă. Ţinând seama şi de Observaţia 3.1.2 rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Presupunem acum că $\exists\ \alpha \le 1$, astfel încât $\exists\ \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = l$ şi e finită. Deoarece $l > 0$, putem presupune că $0 < \varepsilon < l$. Pentru un astfel de ε, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $l - \varepsilon < x^{\alpha} f(x) < l + \varepsilon$ pentru orice $x > \delta_\varepsilon$.

În particular avem $\dfrac{l-\varepsilon}{x^{\alpha}} < f(x)$, $\forall\ x > \delta_\varepsilon$.

Deoarece $\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} \dfrac{l-\varepsilon}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ este divergentă (Vezi exemplul 3.1.1), din Teorema 3.1.2 rezultă că $\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă. În sfârşit, din Observaţia 3.1.2 rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Dacă $\exists\ \alpha \le 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = +\infty$, atunci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > a$ astfel încât $x^{\alpha} f(x) > \varepsilon$ pentru orice $x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$. Aşadar, $f(x) > \dfrac{\varepsilon}{x^{\alpha}}$, $\forall\ x > \delta_\varepsilon$. Cum

$\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ este divergentă în acest caz, rezultă că $\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă, deci $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplul 3.1.4 Să se studieze convergenţa integralei $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$, unde P şi Q sunt polinoame, $\mathrm{gr}P \le \mathrm{gr}Q - 2$ şi $Q(x) \neq 0,\ \forall\ x > a$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \frac{|P(x)|}{|Q(x)|}$ este finită, din Teorema 3.1.3 rezultă că $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă conform Corolarului 3.1.1.

Teorema 3.1.4 *Fie* $f : [a, b) \to \Upsilon_+$, *integrabilă pe intervalul* $[a, u]$ *pentru orice* $a < u < b < \infty$. Atunci

1) *Dacă* $\exists\ \alpha < 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha f(x)$ *există şi e finită, rezultă că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

2) *Dacă* $\exists\ \alpha \ge 1$ *astfel încât există* $\lim\limits_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha f(x) > 0$, *atunci* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *diverge*.

Demonstraţia este asemănătoare cu demonstraţia Teoremei 3.1.3, ţinându-se seama de faptul că $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \ge 1$ (Exemplul 3.1.2).

Exemplul 3.1.5 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}}$ este convergentă deoarece

$\lim\limits_{x \nearrow 2} (2-x)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, în timp ce $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(2-x)^3}}$ este divergentă, deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 2} (2-x)^3 \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$.

Are loc de asemenea, următoarea teoremă:

Teorema 3.1.5 *Fie* $f : (a, b] \to \Upsilon_+$, *integrabilă pe* $[v, b]$ *pentru orice* $-\infty < a < v < b$. *Atunci*:

1) *Dacă* $\exists\ \alpha < 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x \searrow a} \left(x-a\right)^{\alpha} f(x)$ *există şi e finită, rezultă că* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

2) *Dacă* $\exists\ \alpha \geq 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x \searrow a} \left(x-a\right)^{\alpha} f(x) > 0$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *este divergentă.*

Exemplul 3.1.6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\left(x+1\right)}}$ este convergentă, deoarece $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} x^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x\left(x+1\right)}} = 1 < \infty$ iar $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^5\left(x+1\right)}}$ este divergentă, deoarece $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} x^{5/2} \frac{1}{\sqrt{x^5\left(x+1\right)}} = 1 > 0$.

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de „Criteriul integral al lui Cauchy”.

Teorema 3.1.6 *Fie* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie monoton descrescătoare. Atunci* $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie.

Deoarece $f(n) \leq f(x) \leq f\left(n-1\right)$ pentru orice $x \in \left[n-1, n\right]$ rezultă că $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f\left(n-1\right)$, $\forall\ n \geq 2$ şi mai departe că

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \leq \int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{m-1} f(n)\text{, pentru orice } m \geq 2 \qquad (1)$$

Dacă presupunem că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(n)$ este convergentă, rezultă că $\exists\ M > 0$ astfel încât $\sum\limits_{n=1}^{m-1} f(n) < M,\ \forall\ m \geq 2$. Ţinând seama de (1) rezultă că $\int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x < M$ pentru orice $m \geq 2$.

Fie $u > 1$ oarecare şi fie $m \in \mathbb{N}^*$, $m > u$. Deoarece $f \geq 0$, rezultă că

$\int_1^u f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x < M$. Aşadar, ∃ $\lim\limits_{u\to\infty} \int_1^u f(x)\,\mathrm{d}x \le M$, deci $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Dacă presupunem acum că $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f(n)$ este divergentă, rezultă că $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{m\to\infty}^{m} f(n) = \infty$ şi deci că $\lim\limits_{m\to\infty} \int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$. De unde deducem că $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplul 3.1.7 $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, deci este convergentă dacă $\alpha > 1$ şi este divergentă dacă $\alpha \le 1$.

Teorema 3.1.7 (Criteriul Dirichlet)

Fie f,g : [*a*, *b*) → ℝ, *unde b este finit sau nu. Presupunem că f este continuă şi că există M >* 0 *astfel încât* $|F(u)| \le M$, ∀ *a < u < b*, *unde am notat cu* *F*(*u*) $= \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$. *Despre funcţia g presupunem că este monoton descrescătoare, de clasă* C^1 *şi nenegativă pe* [*a*, *b*). *În plus* $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = 0$. *Atunci* $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Demonstraţie.

Demonstraţia se bazează pe Teorema 3.1.1. Pentru orice $u', u'' \in (a,b)$ avem

$$\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u'}^{u''} F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x .$$

Pe de altă parte, *g* fiind descrescătoare rezultă că $g'(x) \le 0$, ∀ *x* ∈ [*a*, *b*] şi, conform teoremei de medie există ξ în intervalul de capete *u'* şi *u''* astfel încât

$$\int_{u'}^{u''} F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)\int_{u'}^{u''} g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)\left[g(u'') - g(u')\right]$$

Aşadar, avem: $\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(u'')g(u'') - F(u')g(u') - F(\xi)\left[g(u'') - g(u')\right]$.

Ţinând seama că $|F(u)| \le M$, ∀ *u* ∈ (*a*, *b*) rezultă:

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2M\left[g(u'') + g(u')\right].$$

Prin ipoteză $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = 0$, deci pentru ∀ $\varepsilon > 0$, ∃ $\alpha < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$ pentru orice $x \in (\delta_\varepsilon, b)$. Aşadar, dacă *u'* şi *u''* $\in (\delta_\varepsilon, b)$, rezultă că:

$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\right)=\varepsilon$, deci $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă conform Teoriei 3.1.1.

Exemplul 3.1.8 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Într-adevăr, fie $f(x)=\sin x$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$, $x \in [1, \infty)$. Constatăm imediat că funcţiile *f* şi *g* satisfac condiţiile Teoremei 3.1.5, deci $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Observaţia 3.1.3 Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, integrabilă pe $[a, u]$, $\forall\ a < u < b < \infty$. Dacă există $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ şi e finită, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \nearrow b} (b-x)^{\frac{1}{2}}\,|f(x)|=0$, deci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă în virtutea Teoremei 3.1.4. Aşadar, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă conform Corolarului 3.1.1.

Exemplul 3.1.9 Integrala lui Dirichlet $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Într-adevăr, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, rezultă că $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Pe de altă parte, în Exemplul 3.1.8 am arătat că $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Definiţia 3.1.3 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *integrabilă pe fiecare interval compact* $[v, u] \subset \mathbb{R}$. *Spunem că* $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă dacă există* $\lim\limits_{\substack{u\to\infty\\ v\to-\infty}} \int_v^u f(x)\,\mathrm{d}x$ *şi este finită. Se numeşte valoare principală* (*în sensul lui Cauchy*) *următoarea limită* (v.p.) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to\infty}\int_{-u}^u f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se poate întâmpla ca o integrală $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ să fie divergentă, dar valoarea sa principală să fie finită.

Exemplul 3.1.10 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{u\to\infty \\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{u\to\infty \\ v\to-\infty}} \frac{1}{2}\ln\frac{1+u^2}{1+v^2}$ nu există, rezultă că $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ este divergentă. Pe de altă parte (v.p.) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0$.

În mod asemănător, dacă $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$, spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă există $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0_+ \\ \eta\to 0_+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$ şi e finită. De asemenea notăm cu (v.p.) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$ şi o numim valoarea principală în sensul lui Cauchy.

Exemplul 3.1.11 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ este divergentă deoarece

$\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0_+ \\ \eta\to 0_+}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\eta}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0_+ \\ \eta\to 0_+}} \ln\frac{\varepsilon}{\eta}$ nu există.

Pe de altă parte

$$\text{(v.p.)} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon \right) = 0.$$

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de teorema schimbării de variabilă pentru integrale generalizate.

Teorema 3.1.8 *Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *continuă şi fie* $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ *o funcţie de clasă* C^1, *strict crescătoare astfel încât* $\varphi(\alpha) = a$ *şi* $\lim\limits_{t \nearrow \beta} \varphi(t) = b$. *Atunci, dacă una din integralele*: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *respectiv* $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *este convergentă, atunci şi cealaltă este convergentă şi are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demonstraţie.

Fie $a < u < b$. Deoarece φ este strict crescătoare şi continuă, rezultă că $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ este bijectivă, deci $\exists\ \alpha < \tau < \beta$ astfel încât $\varphi(\tau) = u$. Din Teorema schimbării de variabilă pe un interval compact avem:

$$\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\tau f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t .$$

Să presupunem, de exemplu, că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Atunci rezultă că $\exists \lim\limits_{\tau \to \beta} \int_\alpha^\tau f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{u \to b} \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x = (v)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Aşadar, $\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ este convergentă şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

3.2. INTEGRALE CU PARAMETRU

Fie $D = [a, b] \times [c, d]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă pentru orice $t \in [c, d]$, funcţia $x \to f(x, t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ va depinde de t. Se poate defini astfel o funcţie $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ astfel:

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x,\ \forall\ t \in [c, d].$$

Se poate considera o situaţie mai generală, în care parametrul t intervine şi în limitele integralei. Mai precis avem:

Definiţia 3.2.1 *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi fie $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$. Dacă pentru orice $t \in [c, d]$, funcţia $x \to f(x, t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci funcţia $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ definită prin:*

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x,\ \forall\ t \in [c, d] \tag{1}$$

se numeşte integrală cu parametru.

În continuare, vom analiza în ce condiţii funcţia F este continuă, derivabilă, integrabilă etc.

Teorema 3.2.1 *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ sunt continue, atunci $F : [c, d] \to \mathbb{R}$, definită prin $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x,\ \forall\ t \in [c, d]$ este continuă pe $[c, d]$.*

Demonstraţie.

Fie $t_0 \in [c, d]$ un punct oarecare fixat.

Să evaluăm diferența $F(t)-F(t_0)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t_0)\,\mathrm{d}x$.

Ținând seama de descompunerea $\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}=\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)}+\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}+\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)}$ avem:

$$F(t)-F(t_0)=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\left[f(x,t)-f(x,t_0)\right]\mathrm{d}x+\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad (2)$$

Deoarece f este continuă pe mulțimea compactă D, rezultă că f este mărginită pe D, deci există $M>0$ astfel încât $|f(x,t)|<M$, $\forall\ (x,t)\in D$.

În continuare avem:

$$|F(t)-F(t_0)|\le\left|\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}|f(x,t)-f(x,t_0)|\mathrm{d}x\right|+M|\beta(t)-\beta(t_0)|+M|\alpha(t)-\alpha(t_0)|.$$

Cum f este continuă pe mulțimea compactă D, rezultă că f este uniform continuă pe D, deci $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta'_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ (x',t')\in D$, $\forall\ (x'',t'')\in D$ cu proprietatea $|x'-x''|<\delta'_\varepsilon$, $|t'-t''|<\delta'$ avem

$$|f(x',t')-f(x'',t'')|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (3)$$

Pe de altă parte, din continuitatea funcțiilor α şi β rezultă că $\exists\ \delta''_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ t\in[c,d]$ cu $|t-t_0|<\delta''_\varepsilon$ avem:

$$|\alpha(t)-\alpha(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{şi} \quad |\beta(t)-\beta(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3M} \quad (4)$$

Fie $\delta_\varepsilon=\min(\delta'_\varepsilon;\delta''_\varepsilon)$ şi fie $t\in[c,d]$ cu $|t-t_0|<\delta_\varepsilon$. Ținând seama de (3) şi (4), rezultă:

$$F(t)-F(t_0)\le\frac{\varepsilon}{3(b-a)}|\beta(t_0)-\alpha(t_0)|+M\frac{\varepsilon}{3M}+M\frac{\varepsilon}{3M}\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Aşadar, pentru $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice $t\in[c,d]$ cu $|t-t_0|<\delta_\varepsilon$ avem $|F(t)-F(t_0)|<\varepsilon$, deci F este continuă în t_0. Cum t_0 a fost arbitrar în $[c,d]$, rezultă că F este continuă pe $[c,d]$.

Observația 3.2.1 Concluzia Teoremei 3.2.1 se poate formula şi astfel:

$$\lim_{t\to t_0}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t_0)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplul 3.2.1 Să se calculeze $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$.

Folosind Teorema 3.2.1 rezultă imediat că

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_0^2\lim_{\alpha\to 0}x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Teorema 3.2.2 *Fie $f: D\to\mathbb{R}$ continuă. Presupunem în plus că există $\frac{\partial f}{\partial t}$ şi e continuă pe D, iar funcţiile α, β : [c, d] $\to$ [a, b] sunt derivabile pe [c, d] . Atunci rezultă că funcţia F : [c, d] $\to\mathbb{R}$, definită prin $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t\in[c,d]$ este derivabilă pe [c, d] şi*

$$F'(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x+\beta'(t)f\left[\beta(t),t\right]-\alpha'(t)f\left[\alpha(t),t\right]\tag{5}$$

(Formula (5) este cunoscută sub numele de formula lui Leibniz de derivare a integralei cu parametru).

Demonstraţie.

Fie $t_0\in[c,d]$ fixat şi $t\in[c,d]$, $t\neq t_0$. Ţinând seama de descompunerea (2) rezultă:

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}x+\frac{1}{t-t_0}\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)}f(x,t)\,\mathrm{d}x-$$
$$-\frac{1}{t-t_0}\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Conform teoremei de medie există ξ între $\beta(t_0)$ şi $\beta(t)$ şi η între $\alpha(t_0)$ şi $\alpha(t)$ astfel încât să avem:

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}x+f(\xi,t)\frac{\beta(t)-\beta(t_0)}{t-t_0}-$$
$$-f(\eta,t)\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}.$$

Pe de altă parte, din Teorema Lagrange rezultă că există θ în intervalul deschis de capete t_0 şi t astfel încât $f(x,t)-f(x,t_0)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,\theta)(t-t_0)$. Aşadar, avem:

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,\theta)\,\mathrm{d}x+f(\xi,t)\frac{\beta(t)-\beta(t_0)}{t-t_0}-f(\eta,t)\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}.\tag{6}$$

În continuare, ținând seama de Teorema 3.2.1 şi de faptul că f şi $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ sunt continue pe D, iar α şi β sunt derivabile pe $[c, d]$, rezultă că membrul drept al egalității (6) are limită, deci $\exists$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,\mathrm{d}x+\beta'(t_0)f\left[\beta(t_0),t_0\right]-$$
$$-\alpha'(t_0)f\left[\alpha(t_0),t_0\right].$$

Aşadar, F este derivabilă în punctul t_0 şi

$$F'(t_0)=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,\mathrm{d}x+\beta'(t_0)f\left[\beta(t_0),t_0\right]-\alpha'(t_0)f\left[\alpha(t_0),t_0\right].$$

Cum t_0 a fost arbitrar, rezultă că F este derivabilă pe $[c, d]$ şi are loc formula (5).

Exemplul 3.2.2 Fie integralele eliptice:

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{şi} \quad K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ 0<k<1.$$

Să se arate că $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}=\dfrac{E-K}{k}$ şi $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k}=\dfrac{E}{k\left(1-k^2\right)}-\dfrac{K}{k}$. Verificăm prima egalitate. Într-adevăr, din Teorema 3.2.2 rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}E(k)}{k}=\int_0^{\pi/2}\frac{-k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E(k)-K(k)}{k},\ \ 0<k<1.$$

Exemplul 3.2.3 Să se arate că funcția $y(x)=\int_0^{\pi}\cos\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\mathrm{d}\alpha$, $x\in\Upsilon$ verifică ecuața lui Bessel:

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0 \tag{7}$$

Într-adevăr, din Teorema 3.2.2 avem:

$$y'(x)=\int_0^{\pi}\sin\alpha\cdot\sin\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\mathrm{d}\alpha \ \text{ şi}$$
$$y''(x)=\int_0^{\pi}-\sin^2\alpha\cdot\cos\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\mathrm{d}\alpha.$$

Înlocuind în ecuația (7) obținem:

$$\int_0^{\pi}\left[\left(-x^2\sin^2\alpha+x^2-n^2\right)\cos\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)+x\sin\alpha\cdot\sin\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\right]\mathrm{d}\alpha=$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\left(x^2 \cos^2 \alpha - n^2 \right) \cos\left(n\alpha - x\sin\alpha \right) + x\sin\alpha \cdot \sin\left(n\alpha - x\sin\alpha \right) \right] \mathrm{d}\alpha =$$

$$= -\int_0^{\pi} \left[\left(n + x\cos\alpha \right) \sin\left(n\alpha - x\sin\alpha \right) \right]' \mathrm{d}\alpha = \left(n + x\cos\alpha \right) \sin\left(n\alpha - x\sin\alpha \right) \Big|_0^{\pi} = 0 .$$

Exemplul 3.2.4 Să se calculeze $F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\alpha^2 - \sin^2 x \right) \mathrm{d}x$, α > 1. Funcția $f(x,\alpha) = \ln\left(\alpha^2 - \sin^2 x \right)$, $x \in [0,\pi/2] \times (1,\infty)$ satisface condițiile Teoremei 3.2.2 pe orice mulțime compactă $D = [0,\pi/2] \times [c,d] \subset [0,\pi/2] \times (1,\infty)$. Rezultă că avem:

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 x} \mathrm{d}x , \ \forall \ \alpha > 1.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă tg $x = t$ rezultă:

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha \, \mathrm{d}x}{\alpha^2 - \sin^2 x} = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha \, \mathrm{d}t}{\left(\alpha^2 - \dfrac{t^2}{1+t^2} \right)\left(1 + t^2 \right)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}} =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2 - 1} \cdot \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} t \Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} .$$

Aşadar, avem: $F(\alpha) = \pi \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) + C$, $\alpha > 1$.

Pe de altă parte, avem

$$C = \lim_{\alpha \to \infty} \left[\int_0^{\pi/2} \ln\left(\alpha^2 - \sin^2 x \right) \mathrm{d}x - \pi \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \right] =$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left[\int_0^{\pi/2} \ln \alpha^2 \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2} \right) \mathrm{d}x - \pi \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \right] =$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left[\int_0^{\pi/2} \left(2\ln\alpha + \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2} \right) \right) \mathrm{d}x - \pi \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \right] =$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \pi \ln \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} + \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\alpha^2} \right) \mathrm{d}x = \pi \ln \frac{1}{2} .$$

În final avem: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\alpha^2 - \sin^2 x \right) \mathrm{d}x = \pi \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}$, $\forall \ \alpha > 1$.

Teorema 3.2.3 *Dacă* $f : [a, b] \times [c, d] \to \Upsilon$ *este continuă, atunci funcția* $F : [c, d] \to \Upsilon$, $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$, *este continuă pe* $[c, d]$ *și*

$$\int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x,$$

relație echivalentă cu $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

Demonstrație.

Pentru orice $u \in [a, b]$ notăm cu

$$g(u,t) = \int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad G(u) = \int_c^d g(u,t)\,\mathrm{d}t$$

$$h(x) = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{şi} \quad H(u) = \int_a^u h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Din Teorema 3.2.2, funcțiile $g(u,t)$ şi $\frac{\partial g}{\partial u} = f$ fiind continue, rezultă $G'(u) = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial u}(u,t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t$ şi $H'(u) = h(u) = \int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t$. Aşadar, $G'(u) = H'(u)$, $\forall\ u \in [a, b]$. Rezultă că cele două funcții diferă printr-o constantă, deci există $c \in \Upsilon$ astfel încât

$$G(u) = H(u) + c,\ \forall\ u \in [a, b].$$

Deoarece $G(a) = H(a) = 0$, rezultă că $c = 0$, deci $G(u) = H(u)$, $\forall\ u \in [a, b]$. În particular, pentru $u = b$ avem: $G(b) = H(b)$ adică

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

3.3. INTEGRALE GENERALIZATE CU PARAMETRU

Definiția 3.3.1 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *b finit sau nu. Dacă pentru orice* $t \in [c, d]$, $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă, spunem că* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este punctual (simplu) convergentă pe intervalul* $[c, d]$.

Ținând seama de Teorema 3.1.1 rezultă:

Observația 3.3.1 Fie $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, b finit sau nu. Atunci $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este punctual convergentă pe $[c, d]$ dacă şi numai dacă $\forall\ t \in [c, d]$ şi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_{t,\varepsilon} < b$ astfel încât $\forall\ u', u'' \in (\delta_{t,\varepsilon}, b)$ avem $\left| \int_{u'}^{u''} f(x,t)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$.

Există şi un alt tip de convergentă, cu proprietăţi mai bune decât convergenţa punctuală, în care δ depinde numai de ε şi nu depinde de t. Acest tip de convergenţă se numeşte convergenţă uniformă. Mai precis avem:

Definiţia 3.3.2 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *b finit sau nu. Spunem că* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$, *dacă* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ *astfel încât,* $\forall\ u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ *şi* $\forall\ t \in [c, d]$ *avem* $\left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Din Definiţia 3.3.2 şi Observaţia 3.3.1 rezultă imediat că:

Observaţia 3.3.2 Convergenţa uniformă implică convergenţa punctuală.

Teorema 3.3.1 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *b finit sau nu.*
Dacă $\exists\ \varphi : [a, b) \to \Upsilon_+$ *cu proprietăţile*:

1) $|f(x,t)| \le \varphi(x)$, $\forall\ (x,t) \in [a, b) \times [c, d]$.
2) $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă, atunci* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$.

Demonstraţie.

Deoarece $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât $\left|\int_{u'}^{u''} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$, $\forall\ u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$.

Cum $\left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{u'}^{u''} |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{u'}^{u''} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$, pentru orice $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ şi $\forall\ t \in [c, d]$, rezultă că $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[c, d]$.

Exemplul 3.3.1 $\int_0^\infty e^{-x} \sin t\,\mathrm{d}x$, $t \in \Upsilon$ este uniform convergentă pe Υ. Într-adevăr, $\left|e^{-x} \sin t\,x\right| \le e^{-x}$, $\forall\ x \in [0, \infty)$ şi $\forall\ t \in \Upsilon$. Cum $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{u \to \infty} \int_0^u e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, este convergentă, rezultă că $\int_0^\infty e^{-x} \sin t\,x\,\mathrm{d}x$ este

uniform convergentă pe Υ .

În continuare, prezentăm fără demonstrație, un alt criteriu de convergență uniformă.

Teorema 3.3.2 (Abel-Dirichlet)

Fie f, g : $[a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$. *Considerăm următoarele condiții*:

(α_1) $\exists\, M > 0$ *astfel încât* $\left|\int_a^u f(x,t)\mathrm{d}x\right| < M$, $\forall\, a < u < b$, $\forall\, t \in [c, d]$.

(β_1) *Pentru orice* $t \in [c, d]$, *funcția* $x \to g(x, t)$: $[a, b) \to \Upsilon$ *este monotonă și* $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x,t) = 0$, *uniform în raport cu t (adică,* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, a < \delta_\varepsilon < b$ *astfel încât* $|g(x,t)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in (\delta_\varepsilon, b)$ *și* $\forall\, t \in [c, d)$).

(α_2) $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$..

(β_2) *Pentru orice* $t \in [c, d]$, *funcția* $x \to g(x, t)$: $[a, b) \to \Upsilon$ *este monotonă și* $\exists\, M > 0$ *astfel încât* $|g(x,t)| < M$, $\forall\, x \in [a, b)$ *și* $\forall\, t \in [c, d]$.

Atunci, dacă sunt îndeplinite condițiile α_1) și β_1), respectiv α_2) și β_2), rezultă că $\int_a^b f(x,t)g(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[c, d]$.

Exemplul 3.3.2 $\int_0^\infty e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$. Fie

$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ și $g(x,t) = e^{-tx}$, $x \in [0, \infty)$, $t \in [0, \infty)$. Deoarece $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este convergentă (Vezi Exemplul 3.1.9) și nu depinde de t, rezultă că $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$.

Pe de altă parte, $|g(x,t)| = e^{-tx} \le 1$, $\forall\, x \in [0, \infty)$, $\forall\, t \in [0, \infty)$ deci g satisface condiția β_2). Din Teorema 3.3.2 rezultă că $\int_0^\infty e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$.

Lema 3.3.1 *Fie* f : $[a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *fie* $\{b_n\}$ *cu* $a < b_n < b$ *un șir cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *și fie* $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. *Dacă*

$\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* [*c*, *d*], *atunci şirul de funcţii* $\{F_n\}$ *converge uniform pe* [*c*, *d*] *la funcţia F, unde*

$$F(t) = (v)\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x,t)\mathrm{d}x,\ \forall\ t \in [c, d].$$

Demonstraţie.

Deoarece $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe [*c*, *d*] rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât pentru orice $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ şi $\forall\ t \in [c, d]$ avem

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{1}$$

Cum $b_n \to b$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b_n \in (\delta_\varepsilon, b)$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. dacă presupunem acum că $n \geq n_\varepsilon$ şi $m \geq n_\varepsilon$, din (1) rezultă că:

$$|F_n(t) - F_m(t)| = \left|\int_{b_n}^{b_m} f(x,t)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{2}$$

Aşadar, şirul $\{F_n\}$ este uniform fundamental, deci uniform convergent pe [*c*, *d*]. Pe de altă parte, este evident că pentru orice $t \in [c, d]$ avem

$$\lim_{m\to\infty} F_m(t) = \lim_{m\to\infty} \int_a^{b_m} f(x,t)\mathrm{d}x = F(t).$$

Trecând la limită în (2) după $m \to \infty$ obţinem

$|F_n(t) - F(t)| \leq \varepsilon$, $\forall\ t \in [c, d]$, deci $F_n \xrightarrow{u} F$ pe [*c*, *d*].

Teorema 3.3.3 *Dacă* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$ *este continuă, şi dacă* $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* [*c*, *d*], *atunci funcţia* $F : [c, d] \to \Upsilon$, *definită prin* $F(t) = (v)\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$, *este continuă pe* [*c*, *d*].

Demonstraţie.

Fie $a < b_n < b$, $b_n \to b$ şi fie $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. Din Teorema 3.1.1 rezultă că F_n este continuă pe [*c*, *d*], $\forall\ n$. Pe de altă parte, Lema 3.3.1 implică faptul că $F_n \xrightarrow{u} F$ pe [*c*, *d*]. Din Teorema referitoare la continuitatea limitei unui şir de funcţii (vezi [9] Teorema 2.1.2) rezultă că *F* este continuă pe [*c*, *d*].

Teorema 3.3.4 *Fie* $D = [a, b) \times [c, d]$ *şi* $f : D \to \Upsilon$, *cu proprietăţile*:

(i) *f şi $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ sunt continue pe D.*

(ii) $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este punctual convergentă pe* $[c, d]$.

(iii) $\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$.

Atunci, funcţia $F : [c, d] \to \Upsilon$, definită prin $F(t) = (v) \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$, este derivabilă pe $[c, d]$ şi $F'(t) = (v)\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$.

Demonstraţie.

Fie $a < b_n < b$, $b_n \to b$ şi fie $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. Este evident că şirul $\{F_n\}$ converge punctual pe $[c, d]$ la funcţia F. Pe de altă parte, din Teorema 3.1.2 rezultă că F_n este derivabilă pe $[c, d]$ şi $F_n'(t) = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$. Observăm de asemenea, că dacă notăm cu $G(t) = (v)\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$, atunci din Lema 3.3.1 rezultă că $F_n' \xrightarrow{\ u\ } G$ pe $[c, d]$. Conform teoremei de derivabilitate a limitei unui şir de funcţii ([9] teorema 2.1.4) rezultă că F este derivabilă şi $F'(t) = G(t)$, $\forall\ t \in [c, d]$ şi cu aceasta, teorema este demonstrată.

Exemplul 3.3.3 Să se calculeze integrala lui Dirichlet: $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Fie $F(t) = \int_0^\infty e^{-t\,x}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $t \in [0, \infty)$.

Aşa cum am văzut în Exemplul 3.3.2 $\int_0^\infty e^{-t\,x}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$. Cum funcţia de sub integrală este continuă, din Teorema 3.3.3 rezultă că F este continuă pe $[0, \infty)$, deci $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = F(0) = \lim\limits_{t \square 0} F(t)$.

Pe de altă parte, avem: $\int_0^\infty \dfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t\,x}\dfrac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^\infty e^{-t\,x}\sin x\,\mathrm{d}x$. Fie $a > 0$ oarecare. Deoarece $\left|e^{-t\,x}\sin x\right| \le e^{-ax}$, $\forall\ x \in [0, \infty)$ şi $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, rezultă că $-\int_0^\infty e^{-t\,x}\sin x\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[a, \infty]$, $\forall\ a > 0$.

Din Teorema 3.3.4 rezultă că pentru orice $t > 0$ avem

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-tx}\sin x}{t}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-tx}\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{t}\left(-\frac{\cos x\, e^{-tx}}{t}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x .$$

Mai departe avem $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)F'(t) = -\frac{1}{t^2}$, deci $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, $t > 0$. Aşadar,

$$F(t) = -\mathrm{arctg}\, t + C,\ \forall\ t > 0 \tag{3}$$

Pe de altă parte, $|F(t)| \le \int_0^\infty e^{-tx}\mathrm{d}x = \frac{1}{t}$, $\forall\ t > 0$, deci

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0 . \tag{4}$$

Din (3) şi (4) deducem $0 = \lim_{t\to\infty} F(t) = -\frac{\pi}{2} + C$, deci $C = \frac{\pi}{2}$. Folosind din nou (3) obţinem $F(0) = C$.

Cum $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = F(0)$ deducem că $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Teorema 3.3.5 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *continuă. Dacă* $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$, *atunci funcţia* $F : [c, d] \to \Upsilon$, *definită prin* $F(t) = (v)\ \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$ *este continuă (deci integrabilă) pe* $[c, d]$ *şi*

$$\int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,$$

relaţie echivalentă cu

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = (v)\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x .$$

Demonstraţie.

Fie $a < b_n < b$, $b_n \to b$ şi fie $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. Din Teorema 3.2.3 rezultă că $\int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b_n}\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$. Pe de altă parte, din Lema 3.3.1, rezultă că $F_n \xrightarrow{u} F$ pe $[c, d]$, de unde deducem că $\lim_{n\to\infty}\int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t$. Aşadar, avem:

$$\int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^{b_n}\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\,.$$

Rezultă că $\exists \lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}} \int_a^u\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ (finită), deci

$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$ este convergentă şi

$$(v)\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\,.$$

3.4. INTEGRALELE LUI EULER

Definiția 3.4.1 *Se numeşte funcția **beta** sau **integrala lui Euler de prima speță**, următoarea integrală generalizată cu parametri* :

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x\,,\ a>0,\, b>0. \tag{1}$$

Se observă că dacă $a < 1$, funcția de sub integrală nu este definită în 0 şi nu este mărginită pe (0, 1], iar dacă $b < 1$, atunci această funcție nu e definită în 1 şi nu e mărginită pe [0, 1).

Pentru început, vom arăta că integrala (1) este convergentă pentru $a > 0$ şi $b > 0$. Pentru aceasta vom descompune integrala în suma a două integrale $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$. Dacă $a \geq 1$, atunci $\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este o integrală obişnuită deoarece funcția de sub integrală este continuă pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, deci nu se pune problema convergenței.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $1 - a < 1$ şi deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0}\left[x^{1-a}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\right] = 1$, din Teorema 3.1.5 rezultă că $\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este convergentă. Dacă $b \geq 1$, atunci $\int_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este o integrală obişnuită, deci nu se pune problema convergenței.

Dacă $0 < b < 1$, atunci $1 - b < 1$ şi deoarece

$$\lim_{x\nearrow 1}\left[(1-x)^{1-b}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\right] = 1,$$

din Teorema 3.1.4, rezultă că $\int_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este convergentă. Aşadar, funcția B este convergentă pentru orice $a > 0$ şi orice $b > 0$.

Teorema 3.4.1 *Funcția beta are următoarele proprietăți*:

(i) $B(a,b) = B(b,a)$, $a > 0$, $b > 0$.

(ii) *Dacă* $a > 1$, *atunci are loc următoarea relație de recurență:*

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1,\, b)\,. \tag{2}$$

În particular, pentru $m,\, n \in \infty^*$, $m \geq 2$ *avem*

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \tag{3}$$

(iii)
$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} \mathrm{d}t \tag{4}$$

Demonstrație.

Afirmația (i) rezultă imediat, dacă facem schimbarea de variabilă $x = 1 - t$.

Integrând prin părți, pentru $a > 1$ şi $b > 0$ avem:

$$B(a,b) = -\frac{1}{b} x^{a-1} (1-x)^b \Big|_0^1 + \frac{a-1}{b} \int_0^1 x^{a-2} (1-x)^b \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a-1}{b} \int_0^1 x^{a-2} \left[(1-x)^{b-1} - (1-x)^{b-1} x \right] \mathrm{d}x = \frac{a-1}{b} B(a-1,b) - \frac{a-1}{b} B(a,b)\,.$$

Mai departe avem:

$$\left(1 + \frac{a-1}{b}\right) B(a,b) = \frac{a-1}{b} B(a-1,b) \quad \text{sau} \quad B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1,b)\,.$$

În mod asemănător se arată că dacă $b > 1$, atunci

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a,b-1)\,.$$

Deoarece $B(a,1) = \dfrac{1}{a}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă:

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{n-(n-1)}{a+n-(n-1)} B(a,1) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\,;$$

În particular, pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > 1$ avem: $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.

(iii) Considerăm schimbarea de variabilă $x = \dfrac{t}{1+t}$ şi obținem

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a-1}(1+t)^{b-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} \cdot \mathrm{d}t\,.$$

Definiţia 3.4.2 *Se numeşte funcţia* ***gama****, sau* ***funcţia lui Euler de speţa a doua****, următoarea integrală generalizată cu parametru* :

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,\mathrm{d}x\,,\ \ a>0. \tag{5}$$

Pentru a arăta că integrala (5) este convergentă, pentru orice $a > 0$, descompunem integrala în suma a două integrale: $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$.

Dacă $a \ge 1$, $\int_0^1 e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este o integrală obişnuită, deoarece funcţia de sub integrală este continuă pe [0, 1], deci nu se pune problema convergenţei.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $1 - a < 1$ şi deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{1-a}e^{-x}x^{a-1}\right)=1$, din Teorema 3.1.5, rezultă că $\int_0^1 e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este convergentă.

Pe de altă parte, observăm că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}x^{a-1}\right)=0$. Din Teorema 3.1.4, rezultă că $\int_1^\infty e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este convergentă. Aşadar, $\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este convergentă, pentru orice $a > 0$.

Teorema 3.4.2 *Funcţia* Γ *are următoarele proprietăţi*:

(i) $\Gamma(1)=1$

(ii) $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$, $a > 0$. *În particular* $\Gamma(n + 1) = n!$, $n \in \infty^*$.

(iii) $B\left(a,b\right)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma\left(a+b\right)}$, $a > 0$, $b > 0$.

Demonstraţie.

(i) $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$.

(ii) $\Gamma\left(a+1\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^a\,\mathrm{d}x=-e^{-x}x^a\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,\mathrm{d}x=a\Gamma(a)$.

În particular, pentru $n \in \infty^*$ avem:

$\Gamma\left(n+1\right)=n\Gamma(n)=n\left(n-1\right)\Gamma\left(n-1\right)=\ldots=n\left(n-1\right)\ldots2\Gamma(1)$

Cum $\Gamma(1)=1$, rezultă $\Gamma\left(n+1\right)=n!$

Aşadar, observăm că funcţia Γ generalizează funcţia factorial, funcţie care are sens numai pentru numere naturale.

(iii) Pentru început observăm că dacă facem schimbarea de variabilă $x = ty$, $t > 0$ obţinem:

$$\Gamma(a)=t^a\int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}\,\mathrm{d}\,y \tag{6}$$

Înlocuind în (6) pe a cu $a + b$ şi pe t cu $t + 1$ obţinem:

$$\frac{\Gamma(a+b)\cdot t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} = t^{a-1}\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,\mathrm{d}\,y\,.$$

Ținând seama acum de formula (4), deducem

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{\infty}\frac{\Gamma(a+b)t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\mathrm{d}\,t = \int_0^{\infty}\left(t^{a-1}\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_0^{\infty}\left(t^{a-1}\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,y = \int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\left(\int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-ty}\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,t\,.$$

Ținând seama din nou de (6) rezultă:

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\cdot\frac{1}{y^a}\Gamma(a)\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{\infty} y^{b-1}e^{-y}\,\mathrm{d}\,y = \Gamma(a)\Gamma(b)\,.$$

Aşadar, $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

CAPITOLUL 4

INTEGRALE CURBILINII

4.1. DRUMURI PARAMETRIZATE

Definiția 4.1.1 *Prin drum parametrizat în* $\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ *se înțelege orice funcție vectorială continuă definită pe un interval I din* $\mathbb{R}$ *cu valori în* $\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$. *Dacă notăm cu x, y și z componentele scalare ale lui r, atunci* $r(t)=\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)$, $\forall\ t \in I$.

Ecuațiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I$ se numesc ecuațiile parametrice ale drumului *r*, sau o reprezentare a drumului, iar *t* se numeşte parametru. Imaginea directă *r*(*I*) a intervalului *I* prin funcția vectorială *r*, adică mulțimea $\left\{\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right);\ t \in I\right\}$ se numeşte suportul (urma, hodograful, traiectoria) drumului *r*. Dacă *I* este un interval compact [*a*, *b*], atunci suportul său este o mulțime compactă şi conexă din $\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$. În acest caz, punctele *r*(*a*) şi *r*(*b*) se numesc capetele (extremitățile) drumului. Dacă *r*(*a*) = *r*(*b*) drumul se numeşte închis.

Exemplul 4.1.1 Fie drumul $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definit prin:
$r(t)=\left(R\cos t, R\sin t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t,\ t\in\left[0,2\pi\right]. \end{cases}$$

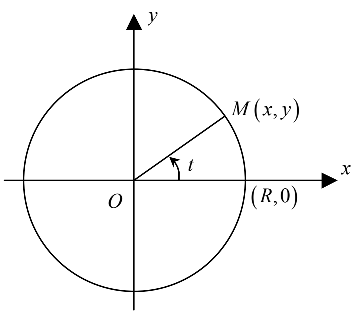


Fig. 1

Observăm că pentru orice $t\in\left[0,2\pi\right]$, punctul $\left(x(t),\ y(t)\right)$ verifică ecuația $x^2+y^2=R^2$. Rezultă că suportul acestui drum este cercul cu centrul în origine şi de rază *R*. Parametrul *t* are în acest caz o interpretare geometrică evidentă şi anume, este unghiul dintre raza corespunzătoare punctului *M*(*x*, *y*) şi direcția pozitivă a axei *Ox*. deoarece $r(0)=r(2\pi)=(R,0)$, drumul este închis.

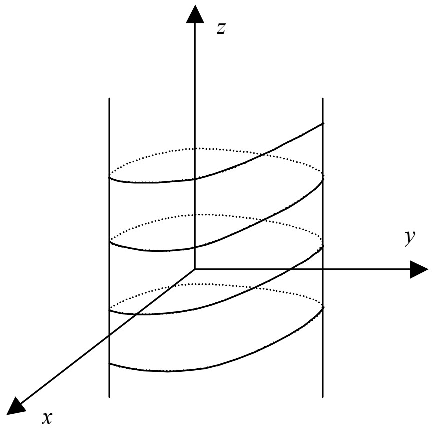


Fig. 2

Exemplul 4.1.2 Fie drumul $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definit astfel: $r(t) = (R\cos t,\ R\sin t,\ ht)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \ , \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Suportul acestui drum este elicea circulară de pas h.

Definiția 4.1.2 *Dacă funcția vectorială r este injectivă, spunem că drumul este simplu* (*fără puncte multiple*). *În cazul unui drum închis, acesta este simplu dacă egalitatea* $r(t_1) = r(t_2)$ *implică sau* $t_1 = t_2$ *sau cel puțin unul din numerele* t_1 *şi* t_2 *este egal cu a şi celălalt cu b, unde cu a şi b am notat capetele intervalului I.*

Drumurile prezentate în Exemplul 4.1.1. şi 4.1.2 sunt simple. Un exemplu de drum care are puncte multiple este faliul lui Descartes:

Exemplul 4.1.3 Considerăm ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \ , \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suportul acestui drum este reprezentat în Fig. 3. Se observă că originea O este punct multiplu.

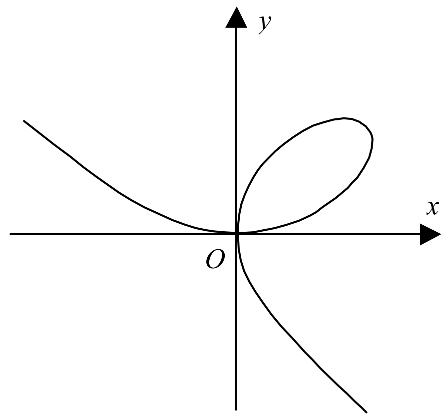


Fig. 3

Definiția 4.1.3 *Un drum* $r = (x, y, z) : I \to \mathbb{R}^3$ *se numeşte neted dacă x, y, z, sunt de clasă* C^1 *pe I şi* $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$, $\forall \quad t \in I$. *Un astfel de drum are proprietatea că în orice punct al suportului său admite tangentă.*

Un drum care nu este neted, se spune că are puncte singulare. Un punct $t_0 \in I$ *se numeşte singular dacă* $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$. *Dacă* $t_0 \in I$ *este un*

punct singular, atunci în punctul $M_0\left[x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right]$ *de pe suport, tangenta nu este definită.*

Un drum se consideră orientat în sensul creşterii parametrului.

Definiția 4.1.4 *Două drumuri* $r_1: I_1 \to \mathbb{R}^3$ *şi* $r_2: I_2 \to \mathbb{R}^3$ *se numesc echivalente şi se notează acest lucru cu* $r_1 \sim r_2$, *dacă există o funcție* $\lambda: I_1 \to I_2$ *bijectivă, strict monotonă, de clasă* C^1 *cu* $\lambda'(t_1) \neq 0$, $\forall\ t_1 \in I_1$, *astfel încât*

$r_1(t_1) = r_2\left[\lambda(t_1)\right]$, $\forall\ t_1 \in I_1$.

O astfel de funcție λ se numeşte şi schimbare de parametru. Din definiție rezultă că dacă λ este o schimbare de parametru, atunci $\lambda'(t_1) > 0$, $\forall\ t_1 \in I$ sau $\lambda'(t_1) < 0$, $\forall\ t_1 \in I$.

Dacă $\lambda' > 0$ pe *I*, deci λ este strict crescătoare, atunci spunem că drumurile r_1 şi r_2 sunt echivalente cu aceeaşi orientare. În caz contrar, spunem că r_1 şi r_2 sunt echivalente cu orientare schimbată.

Este evident că două drumuri echivalente au acelaşi suport.

Exemplul 4.1.4 *Fie drumurile* $r_i: I_i \to \mathbb{R}^2$, *i* = 1,2, *definite astfel:*

$r_1(t_1) = (R\sin t_1, R\cos t_1)$, $\forall\ t_1 \in I_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *respectiv*

$r_2(t_2) = \left(t_2, \sqrt{R^2 - t_2^2}\right)$, $\forall\ t_2 \in I_2 = (0, R)$.

Aceste drumuri au acelaşi suport şi anume arcul $\overset{\frown}{AB}$ al cercului cu centrul în origine şi de rază *R*. (Fig. 4).

Observăm că funcția $\lambda: I_1 \to I_2$ definită prin $\lambda(t_1) = R\sin t_1$, $\forall\ t_1 \in I_1$ este bijectivă, de clasă C^1 şi

$\lambda'(t_1) = R\cos t_1 > 0$, $\forall\ t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mai mult, observăm că

$r_2(\lambda(t_1)) = \left(\lambda(t_1), \sqrt{R^2 - \lambda^2(t_1)}\right) =$

$= \left(R\sin t_1,\ R\cos t_1\right) = r_1(t_1)$, $\forall\ t_1 \in I_1$.

Rezultă că λ este o schimbare de parametru şi deci că cele două drumuri sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

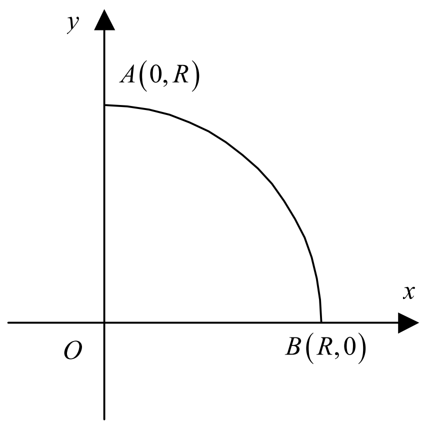


Fig. 4

Considerăm acum drumul $r_3 : I_3 \to \mathbb{R}^2$, $r_3(t_3) = (R\cos t_3, R\sin t_3)$, $\forall\ t_3 \in I_3 = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Observăm, ca mai sus, că funcția $\mu : I_3 \to I_2$ definit prin $\mu(t_3) = R\cos t_3$, $\forall\ t_3 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ este o schimbare de parametru. Cum $\mu'(t_3) = -R\sin t_3 < 0$, $\forall\ t_3 \in I_3$, rezultă că μ este strict descrescătoare.

Drumurile r_3 şi r_2 (respectiv r_3 şi r_1) sunt echivalente cu orientări diferite. Orientarea drumurilor r_1 şi r_2, orientare dată de sensul creşterii parametrului, este de la *A* către *B*, în timp ce orientarea drumului r_3 este de la *B* către *A*.

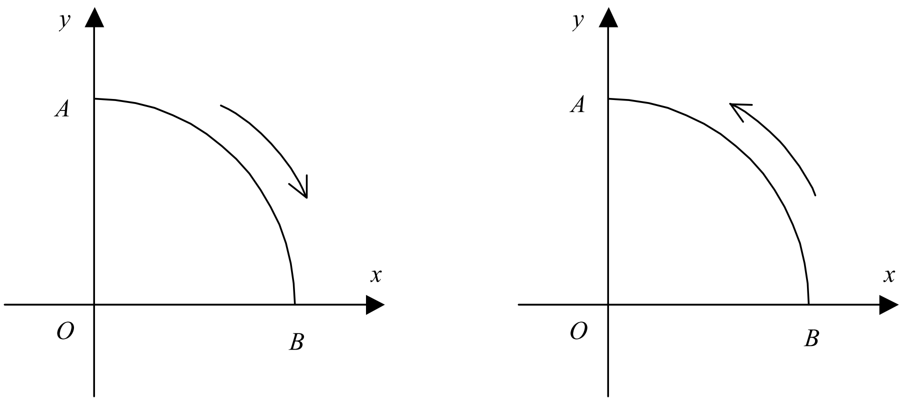


Fig. 5

Definiția 4.1.5 *Se numeşte curbă parametrizată orice clasă de drumuri parametrizate echivalente.*

Aşadar, γ este curbă parametrizată dacă există un drum parametrizat $r : I \to \mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel încât: $\gamma = \left\{\rho : J \to \mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right) \text{ drum parametrizat} \mid \rho \sim r\right\}$.

Cum $r \sim r$ rezultă că $r \in \gamma$.

O curbă parametrizată este simplă (închisă, netedă) dacă drumul care o determină este simplu (închis sau neted). O curbă simplă se consideră că este orientată pozitiv, dacă drumul care o defineşte este orientat în sensul creşterii parametrului şi negativ în caz contrar.

Fie γ o curbă parametrizată simplă şi netedă, şi fie $r : I \to \mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ drumul parametrizat care o defineşte, orientat în sensul creşterii parametrului. Vom nota cu γ_+ mulțimea tuturor drumurilor parametrizate echivalente cu *r* şi care au aceeaşi

orientare cu *r*. Evident, $r \in \gamma_+$. Vom nota cu γ_- mulțimea tuturor drumurilor parametrizate echivalente cu *r* care au orientare opusă lui *r*.

Suportul unei curbe parametrizate γ este suportul drumului care o defineşte şi evident, acesta coincide cu suportul oricărui reprezentant al curbei γ.

Fie γ curba parametrizată definită de drumul r_1. Suportul său este arcul $\overset{\frown}{AB}$ din Fig. 4. Suportul curbei γ_+ este arcul $\overset{\frown}{AB}$ (orientat de la *A* către *B*), în timp ce suportul curbei γ_- este arcul $\overset{\frown}{BA}$. Evident $r_2 \in \gamma_+$ şi $r_3 \in \gamma_-$. În continuare, vom nota cu $\{\gamma\}$ suportul curbei γ. De asemenea, ori de câte ori nu sunt prilejuri de confuzie, vom identifica o curbă cu unul din reprezentanții săi.

Definiția 4.1.6 *Fie* $r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *şi* $r_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^3$ *două drumuri parametrizate cu proprietatea că* $r_1(b) = r_2(b)$. *Se numeşte justapunerea drumurilor* r_1 şi r_2 *şi se notează cu* $r_1 \cup r_2$ *următorul drum*:

$$\left(r_1 \cup r_2\right)(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{dacă } t \in [a,b] \\ r_2(t) & \text{dacă } t \in [b,c]. \end{cases}$$

Dacă γ_i este curba definită de r_i, $i = 1,2$, atunci $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este curba definită de drumul $r_1 \cup r_2$. O curbă se numeşte netedă pe porțiuni dacă este justapunerea unui număr finit de curbe netede.

4.2. CURBE RECTIFICABILE

Noțiunea de curbă (drum) introdusă în § 4.1 este destul de generală şi de aceea, în anumite cazuri (în special în cazul curbelor care admit puncte multiple), suportul unei curbe poate să difere esențial față de imaginea intuitivă pe care o avem despre o curbă. Giuseppe Peano a arătat că se pot defini două funcții continue $x = x(t)$, $y = y(t)$ pe intervalul [0, 1], deci un drum, astfel încât, atunci când parametrul *t* parcurge intervalul [0, 1], punctul corespunzător $(x(t), y(t))$ porneşte din punctul (0, 0) care corespunde valorii $t = 0$, trece prin toate punctele pătratului $[0, 1] \times [0, 1]$ şi ajunge în vârful (1, 1) care corespunde valorii $t = 1$. Cu alte cuvinte, suportul acestui drum umple un pătrat. Este clar că noțiunea de lungime pentru un asemenea drum nu are sens.

În cele ce urmează vom introduce noțiunea de drum rectificabil (care are lungime) şi vom arăta cum se calculează lungimea unui drum rectificabil cu ajutorul integralei definite.

Fie $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum şi fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ ecuațiile sale parametrice. Considerăm o diviziune oarecare Δ a intervalului $[a, b]$,

$\Delta\ : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$ şi notăm cu M_i punctul de coordonate $\left(x(t_i), y(t_i), z(t_i)\right)$, $i = \overline{0,n}$. Fie $L_\Delta(r) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left\| M_{i-1}M_i \right\|$ lungimea liniei poligonale obținută prin unirea suucesivă, prin segmente de dreaptă, a punctelor M_i.

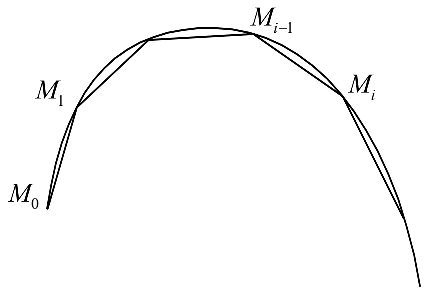


Fig. 6

Este evident că dacă $\Delta' \prec \Delta''$, atunci $L_{\Delta'}(r) \le L_{\Delta''}(r)$.

Mulțimea $\left\{L_\Delta(r)\right\}_\Delta$, când Δ parcurge toate diviziunile posibile ale intervalului [*a*, *b*] este o mulțime de numere pozitive, care poate fi mărginită superior sau nu.

Definiția 4.2.1 *Spunem că drumul r este rectificabil dacă mulțimea* $\left\{L_\Delta(r)\right\}_\Delta$ *este majorată. Pentru un drum rectificabil se numeşte lungimea sa următorul număr*: $L(r) = \sup\limits_{\Delta}\left\{L_\Delta(r)\right\}_\Delta < \infty$.

Lema 4.2.1 *Pentru orice 4 numere reale* a_1, a_2, b_1, b_2, *are loc inegalitatea*:

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right| \le \left|a_1 - b_1\right| + \left|a_2 - b_2\right| \tag{1}$$

Demonstrație.

Amplificând cu conjugata şi ținând seama de inegalitatea triunghiului obținem

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right| &= \frac{\left|a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \le \\ &\le \frac{\left|a_1 - b_1\right|\left|a_1 + b_1\right| + \left|a_2 - b_2\right|\left|a_2 + b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

Pe de altă parte avem: $\left|a_1 + b_1\right| \le \left|a_1\right| + \left|b_1\right| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ şi analog $\left|a_2 + b_2\right| \le \left|a_2\right| + \left|b_2\right| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Ținând seama de aceste inegalități în (2) rezultă

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right| \le \left|a_1 - b_1\right| + \left|a_2 - b_2\right|.$$

Observația 4.2.1 Inegalitatea (1) rămâne valabilă pentru orice $2n$ numere reale $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. De exemplu pentru $n = 3$ avem

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right| \le |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| \qquad (3)$$

Demonstrația este practic aceeași cu demonstrația lemei.

Teorema 4.2.1 *Fie* $r:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ *un drum parametrizat definit astfel*: $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. *Dacă* r *este neted, atunci* r *este rectificabil și lungimea sa este* $L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Demonstrație.

Fie $\Delta \; : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$, și fie $L_\Delta(r)$ lungimea liniei poligonale înscrise în suportul drumului r. Avem:

$$L_\Delta(r) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2 + \left(z(t_i) - z(t_{i-1})\right)^2}\,.$$

Din teorema Lagrange rezultă că există $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ în intervalul deschis (t_{i-1}, t_i), astfel încât

$$L_\Delta(r) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\beta_i) + z'^2(\gamma_i)}\,(t_i - t_{i-1}) \qquad (4)$$

Funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin: $g(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, $t \in [a, b]$, este o funcție continuă, deoarece funcțiile x', y', z' sunt continue prin ipoteză.

Considerăm suma Riemann

$$\sigma_\Delta(g, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\alpha_i) + z'^2(\alpha_i)}\,(t_i - t_{i-1}) \qquad (5)$$

Deoarece g este integrabilă pe $[a, b]$, rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta'_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon$ și oricare ar fi punctele intermediare $\alpha = (\alpha_i)$ avem

$$\left|\sigma_\Delta(g, \alpha) - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon \qquad (6)$$

Pe de altă parte, din inegalitatea (3) și inegalitatea generalizată a triunghiului, rezultă:

$$\left|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g, \varepsilon)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left(\left|y'(\beta_i) - y'(\alpha_i)\right| + \left|z'(\gamma_i) - z'(\alpha_i)\right|\right)(t_i - t_{i-1}) \qquad (7)$$

Cum y' şi z' sunt uniform continue pe $[a, b]$, rezultă că există $\delta''_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall\ t', t''$ în $[a, b]$ cu distanța $|t' - t''| < \delta''_\varepsilon$ avem

$$\left|y'(t') - y'(t'')\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ şi } \left|z'(t') - z'(t'')\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8}$$

Dacă alegem acum diviziunea Δ astfel încât $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$, atunci $|\beta_i - \gamma_i| \leq$ $\leq t_i - t_{i-1} \leq \|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$ şi analog $|\gamma_i - \alpha_i| < \delta''_\varepsilon$ şi conform (8) avem

$$\left|y'(\beta_i) - y'(\alpha_i)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \left|z'(\gamma_i) - z'(\alpha_i)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{9}$$

Ținând seama de (9) în (7) rezultă:

$$\left|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g,\alpha)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon .$$

Aşadar, am demonstrat că $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$ avem

$$\left|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g,\alpha)\right| < \varepsilon \tag{10}$$

Cum g este mărginită pe $[a, b]$, rezultă că $\sigma_\Delta(g,\alpha)$ este mărginită pentru orice Δ şi orice α şi, ținând seama de (10) că mulțimea $\{L_\Delta(r)\}_\Delta$ este mărginită. Prin urmare am demonstrat că drumul r este rectificabil.

Fie $L(r) = \sup\limits_\Delta L_\Delta(r)$. Din definiția marginii superioare rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există o diviziune Δ_n a intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$L(r) - \frac{1}{n} < L_{\Delta_n}(r) \leq L(r) \tag{11}$$

Mai mult, putem presupune că $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$, pentru că în caz contrar, rafinăm această diviziune până obținem o diviziune $\Delta'_n \succ \Delta_n$ cu această proprietate. Cum $L_{\Delta'_n}(r) \geq L_{\Delta_n}(r)$ rezultă că $L_{\Delta'_n}(r)$ satisface (11).

Considerăm acum o diviziune Δ_n a intervalului $[a, b]$ cu proprietatea $\|\Delta_n\| < \min\left(\frac{1}{n}; \sigma'_\varepsilon; \sigma''_\varepsilon\right)$ şi pentru care sunt adevărate inegalitățile (11). Din (6), (10) şi (11) rezultă

$$\begin{aligned} \left|L(r) - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left|L(r) - L_{\Delta_n}(r)\right| + \left|L_{\Delta_n}(r) - \sigma_{\Delta_n}(g,\alpha)\right| + \\ &+ \left|\sigma_{\Delta_n}(g,\alpha) - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{n} + 2\varepsilon \end{aligned} \tag{12}$$

Cum inegalitatea (12) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $\varepsilon > 0$ rezultă că

$$L(r) = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţia 4.2.2 Fie r un drum parametrizat în $\mathbb{R}^2$ definit prin $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Dacă r este neted, atunci r are lungime şi aceasta este $L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Observaţia 4.2.3 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Lungimea graficului acestei funcţii este egală cu $L(r) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Într-adevăr, funcţia f defineşte un drum neted şi anume $r(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$. Graficul lui f coincide cu suportul acestui drum. Afirmaţia rezultă acum din Observaţia 4.2.2.

Observaţia 4.2.4 Dacă r este un drum rectificabil, atunci orice alt drum echivalent cu r este rectificabil şi are aceeaşi lungime ca r.

Într-adevăr, fie $r_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$ două drumuri echivalente şi fie $\lambda : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, bijectivă, strict monotonă de clasă C^1 cu proprietatea $r_2[\lambda(t)] = r_1(t)$, $\forall\ t \in [a_1, b_1]$.

Dacă $\Delta_1 = \{t_i\}$ este o diviziune oarecare a intervalului $[a_1, b_1]$, atunci $\Delta_2 = \lambda(\Delta_1) = \{\lambda(t_i)\}$ este o diviziune a intervalului $[a_2, b_2]$ şi reciproc, orice diviziune Δ_2 a intervalului $[a_2, b_2]$ este de acest tip. Cum $L_{\Delta_1}(r_1) = L_{\Delta_2}(r_2)$ rezultă că $L(r_1) = \sup\limits_{\Delta_1} L_{\Delta_1}(r_1) = \sup\limits_{\Delta_2} L_{\Delta_2}(r_2)$.

Definiţia 4.2.2 *O curbă este rectificabilă dacă este o clasă de echivalenţă a unui drum rectificabil. Lungimea unei curbe rectificabile este lungimea oricărui drum din această clasă de echivalenţă.*

Exemplul 4.2.1 *Lungimea cercului*

O reprezentare parametrică a cercului este $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Conform Teoremei 4.2.1 avem:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = 2\pi R.$$

Exemplul 4.2.2 *Lungimea unei ramuri de cicloidă*

Cicloida este curba parametrizată definită de drumul

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

Observăm că $x'^2(t) + y'^2(t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$. Rezultă că

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

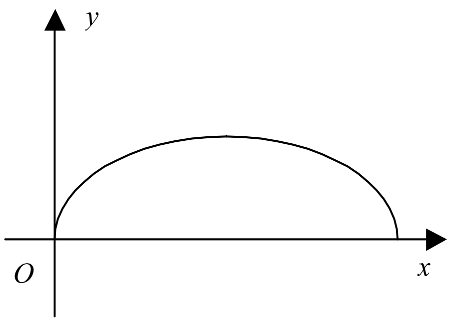


Fig. 7

Exemplul 4.2.3 Lungimea lănţişorului

Lănţişorul este graficul funcţiei

$f(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x \in [a, b]$.

Din Observaţia 4.2.3 deducem

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \, \mathrm{d}x = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} \mathrm{d}x = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

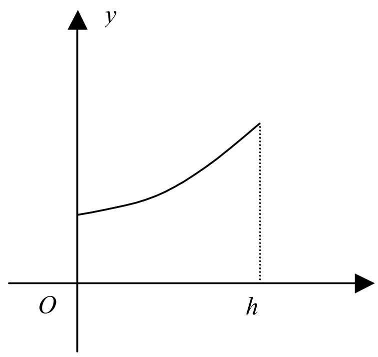


Fig. 8

Exemplul 4.2.4 *Lungimea elipsei*

O reprezentare parametrică a elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este : $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $t \in 0, 2\pi]$.

Este suficient să calculăm un sfert din lungimea elipsei. Avem:

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - \left(a^2 - b^2\right) \sin^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Dacă notăm cu c distanţa focală şi cu ε excentricitatea, atunci

$a^2 - b^2 = c^2$ şi $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

În continuare rezultă

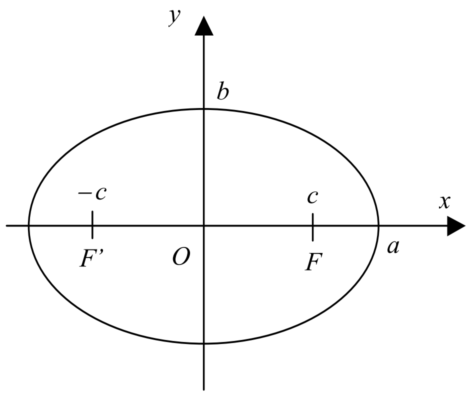


Fig. 9

$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}t$, unde

$0 < \varepsilon < 1$. Suntem conduşi astfel la calculul integralei:

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}t$, $0 < \varepsilon < 1$.

Din păcate, primitiva acestei funcţii nu este o funcţie elementară şi deci calculul acestei integrale nu se poate face cu formula Leibniz-Newton.

Încercarea de a calcula lungimea elipsei ne-a condus la o integrală ce nu poate fi calculată exact. O asemenea integrală se numeşte integrală eliptică.

Se cunosc următoarele tipuri de integrale eliptice:

a) Integrala eliptică de primul tip:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \kappa \in (0,1)$$

b) Integrala eliptică de tipul doi:

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}\, \mathrm{d}\varphi, \quad \kappa \in (0,1)$$

c) Integrala eliptică de tipul trei:

$$F(\kappa, h) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\left(1+h\sin^2 \varphi\right)\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

, $\kappa \in (0,1)$.

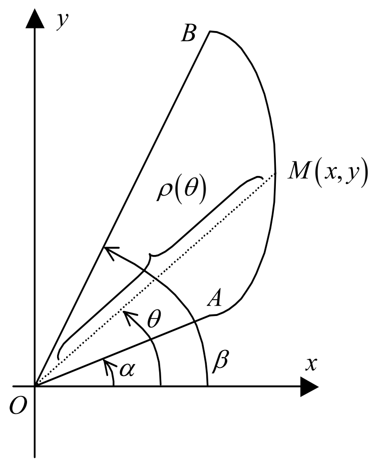


Fig. 10

Calculul acestor integrale se face cu metode aproximative şi s-au întocmit tabele cu valorile lor (aproximative) pentru diferite valori ale parametrilor κ, respectiv κ şi *h*.

Observaţia 4.2.5 Fie $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ o funcţie de clasă C^1 şi fie drumul $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ definit de: $r(\theta) = \left(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta\right)$, $\forall\ \theta \in [\alpha, \beta]$. Drumul r este rectificabil şi lungimea sa este:

$L(r) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, \mathrm{d}\theta$.

Într-adevăr, o reprezentare parametrică a drumului r este:

$$x = \rho(\theta)\cos\theta,\ y = \rho(\theta)\sin\theta,\ \theta \in [\alpha, \beta].$$

Suportul acestui drum este arcul $\overset{\frown}{AB}$, reprezentat în Fig. 10.

Conform Teoremei 4.2.1 avem:

$$L(r)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta\right)^2+\rho'\sin\theta-\rho\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)\right)}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

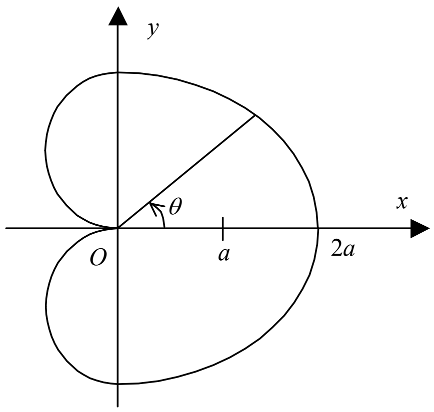


Fig. 11

Exemplul 4.2.5 *Lungimea cardioidei*

Fie $\rho(\theta)=a\left(1+\cos\theta\right)$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Suportul drumului determinat de această funcție este reprezentat în Fig. 11. Din motive de simetrie, este suficient să calculăm jumătate din lungimea acestui drum. Avem

$$\frac{L}{2}=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(a+\cos\theta\right)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2\left(a+\cos\theta\right)}\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=4a.$$

Aşadar, lungimea cardioidei este $L = 8a$.

Observația 4.2.6 Din Teorema 4.2.1 rezultă că dacă $r_1:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ şi $r_2:[b,c]\to\mathbb{R}^3$ sunt două drumuri parametrizate netede şi dacă $r=r_1\cup r_2$ este drumul obținut prin justapunerea lor, atunci r este rectificabil şi

$$L(r)=L\left(r_1\right)+L\left(r_2\right).$$

Mai mult, orice curbă netedă pe porțiuni este rectificabilă şi lungimea sa este suma lungimilor porțiunilor sale netede.

4.3. REPREZENTAREA NORMALĂ A UNEI CURBE RECTIFICABILE

Fie $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ un drum parametrizat neted, definit prin $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$. Conform Teoremei 4.2.1 acest drum este rectificabil şi lungimea sa este:

$$L=L(r)=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pentru orice $t\in[a,b]$ notăm cu

$$s=\lambda(t)=\int_a^t\sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)+z'^2(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

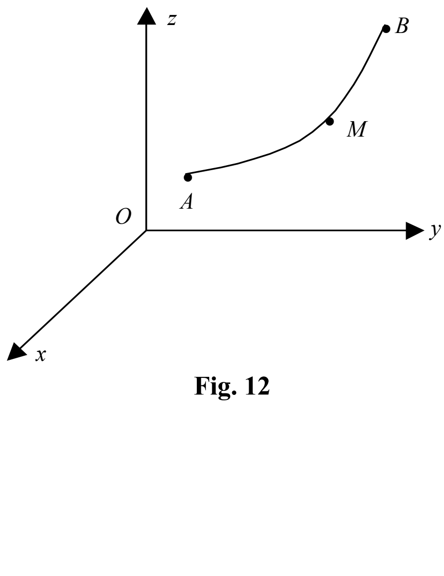


Fig. 12

Dacă M este punctul de coordonate $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, atunci $s = \lambda(t)$ reprezintă lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$.

Deoarece $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} > 0$, $\forall\ t \in [a, b]$, $\lambda(a) = 0$ şi $\lambda(b) = L$, rezultă că $\lambda : [a, b] \to [0, L]$ este o funcţie de clasă C^1, strict crescătoare şi bijectivă. Inversa sa $\lambda^{-1} : [0, L] \to [a, b]$ este de asemenea de clasă C^1.

Considerăm funcţia vectorială $\rho : [0, L] \to \Upsilon^3$ definită prin
$\rho(s) = r\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $s \in [0, L]$.

Este clar că drumurile r şi ρ sunt echivalente şi că funcţia λ este o schimbare de parametru.

Dacă notăm cu $\tilde{x}(s) = x\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $\tilde{y}(s) = y\left[\lambda^{-1}(s)\right]$ şi $\tilde{z}(s) = z\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $\forall\ s \in [0, L]$, atunci $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ constituie o reprezentare parametrică a drumului ρ şi deci a lui r (deoarece $\rho \sim r$).

Definiţia 4.3.1 *reprezentarea parametrică* $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ *poartă numele de reprezentarea parametrică* ***normală*** *a drumului r.*

În reprezentarea parametrică normală, parametrul s reprezintă lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$ unde $A\big(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0), \tilde{z}(0)\big)$ şi $M\left[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)\right]$.

O proprietate importantă a reprezentării normale este următoarea $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$.

Într-adevăr, $\rho = r\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $s \in [0, L]$. Ţinând seama de regulile de derivare a funcţiilor compuse şi inverse, şi de faptul că $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = \frac{dr\left[\lambda^{-1}(s)\right]}{d\left[\lambda^{-1}(s)\right]} \cdot \frac{d\left(\lambda^{-1}(s)\right)}{ds} = \frac{dr(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\lambda'(t)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big), \text{ unde } t = \lambda^{-1}(s).$$

Aşadar, avem

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} \right\| = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = 1.$$

Din punct de vedere geometric $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}$ reprezintă versorul tangentei la curbă, orientată în sensul creşterii parametrului *s*, adică de la *A* către *B*.

Exemplul 4.3.1 Fie drumul $r:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to \mathbb{R}^2$ definit prin $r(t)=\left(R\sin t, R\cos t\right)$, $t\in\left[0,\pi/2\right]$. Avem:

$$L=L(s)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=R\cdot\pi/2 \text{ şi}$$

$$s=\lambda(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\cos^2 u+R^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u=R\cdot t,\quad t\in\left[0,\pi/2\right].$$ Funcţia inversă este: $t=\lambda^{-1}(s)=\dfrac{s}{R}$, $s\in\left[0,\dfrac{R\pi}{2}\right]$.

Reprezentarea normală este:

$$\tilde{x}(s)=R\sin\frac{s}{R},\ \tilde{y}(s)=R\cos\frac{s}{R},\ s\in\left[0,\frac{R\pi}{2}\right].$$

Drumul $\rho=\rho(s)=\left(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s)\right)$, $s\in\left[0,\dfrac{R\pi}{2}\right]$ este echivalent cu drumul *r* şi are aceeaşi orientare cu acesta.

Dacă notăm cu γ_+ curba determinată de drumul *r* orientat în sensul creşterii parametrului *t*, atunci $\rho\in\gamma_+$.

Exemplul 3.4.2 Fie $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ drumul parametrizat definit prin $r(t)=\left(R\cos t, R\sin t, ht\right)$, $t\in[0,2\pi]$. Avem

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t+h^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\sqrt{R^2+h^2};$$

$$s=\lambda(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\sin^2 u+R^2\cos^2 u+h^2}\,\mathrm{d}u=t\sqrt{R^2+h^2},\ t\in[0,2\pi].$$

Funcţia inversă este $t=\lambda^{-1}(s)=\dfrac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $s\in\left[0,2\pi\sqrt{R^2+h^2}\right]$ şi reprezentarea normală este $\tilde{x}(s)=R\cos\dfrac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $\tilde{y}(s)=R\sin\dfrac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $\tilde{z}(s)=\dfrac{h\,s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $s\in\left[0,2\pi\sqrt{R^2+h^2}\right]$.

4.4. INTEGRALE CURBILINII DE PRIMA SPEȚĂ

Fie γ o curbă netedă şi fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ o reprezentare parametrică a sa. O astfel de curbă este rectificabilă şi lungimea sa este $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$. Fie de asemenea, $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ reprezentarea normală a curbei γ şi fie f o funcție reală definită pe suportul curbei γ sau pe o mulțime din $\mathbb{R}^3$ care conține acest suport.

Definiția 4.4.1. *Se numeşte integrala curbilinie de prima speță a funcției f pe curba γ, următoarea integrală definită:* $\int_0^L \left[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)\right]\mathrm{d}s$, *dacă aceasta există. Pentru integrala curbilinie de prima speță se foloseşte notația:* $\int\limits_\gamma f(x, y, z)\,\mathrm{d}s$. *Aşadar avem:*

$$\int\limits_\gamma f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \overset{\text{def}}{=} \int_0^L \left[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)\right]\mathrm{d}s \tag{1}$$

Reamintim că am notat cu s elementul de arc, anume

$$s = \lambda(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)}\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

Exemplul 4.4.1. Să se calculeze $\int\limits_\gamma (x + y + z)\,\mathrm{d}s$, unde γ este elicea circulară $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aşa cum am arătat în Exemplul 3.4.2 reprezentarea normală a elicei circulare este: $\tilde{x}(s) = R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, $\tilde{y}(s) = R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, $\tilde{z}(s) = \frac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, $s \in \left[0, 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}\right]$. Rezultă

$$\int\limits_\gamma f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi\sqrt{R^2+h^2}} \left(R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)\mathrm{d}s =$$

$$= \left(R\sqrt{R^2 + h^2}\sin\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} - R\sqrt{R^2 + h^2}\cos\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\cdot\frac{s^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2\pi\sqrt{R^2+h^2}} =$$

$$= 2h\pi^2\sqrt{R^2 + h^2}\,.$$

Dacă am cunoaşte reprezentarea normală a oricărei curbe, atunci formula (1) ar fi suficientă pentru calculul integralei curbilinii de prima speță. De regulă, o

curbă se dă printr-o reprezentare parametrică în care parametrul t este oarecare, iar reprezentarea sa normală nu se cunoaşte. Teorema următoare permite calculul integralei curbilinii de prima speţă în cazul când reprezentarea parametrică este oarecare.

Teorema 4.4.1. *Fie γ o curbă netedă şi fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ o reprezentare parametrică a sa. Dacă $A \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime care conţine suportul curbei γ şi $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci există integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei f pe curba γ şi*

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\,\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\,\mathrm{d}t \qquad (3)$$

Demonstraţie.

Deoarece f este continuă şi funcţiile x, y, z sunt de clasă C^1 pe $[a, b]$, rezultă că integrala din membrul drept există. Pe de altă parte, funcţiile $\tilde{x} = x \circ \lambda^{-1}$, $\tilde{y} = y \circ \lambda^{-1}$, $\tilde{z} = z \circ \lambda^{-1}$ sunt de asemenea de clasă C^1 pe intervalul $[0, L]$, deci şi integrala din membrul stâng există. Conform Definiţiei 4.4.1 avem:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_0^L f[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\,\mathrm{d}s\,.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $s = \lambda(t)$, $t \in [a,b]$, rezultă $\tilde{x} \circ \lambda = x$, $\tilde{y} \circ \lambda = y$, $\tilde{z} \circ \lambda = z$, $ds = \lambda'(t)\mathrm{d}t = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\,\mathrm{d}t$ şi mai departe:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_0^L f[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\,\mathrm{d}s = \int_{\lambda^{-1}(0)}^{\lambda^{-1}(L)} f[x(t), y(t), z(t)]\,\lambda'(t)\,\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\,\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\,\mathrm{d}t\,.$$

Reluând exemplul 4.4.1 şi ţinând seama de Teorema 4.4.1 obţinem:

$$\int_\gamma (x + y + z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (R\cos t + R\sin t + ht)\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + h^2}\,\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{R^2 + h^2}\,\left(R\sin t - R\cos t + h\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 h\,\sqrt{R^2 + h^2}\,.$$

Observaţia 4.4.1. În cazul unei curbe plane formula (3) devine

$$\int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t)], y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exemplul 4.4.2. Să se calculeze $\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s$, unde γ este porțiunea din primul cadran a elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. O reprezentare parametrică a curbei γ este:

$x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Conform Teoremei 4.4.1 avem

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\,\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $u=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ atunci rezultă $du=2\left(a^2-b^2\right)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$ şi mai departe,

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}u^{3/2}\Big|_{b^2}^{a^2}=\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}.$$

Observația 4.4.2. Dacă γ este o curbă netedă pe porțiuni (este o justapunere de curbe netede) atunci avem:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{P}\int_{\gamma_i} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s\text{, unde }\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\ldots\cup\gamma_p.$$

Observația 4.4.3. Integrala curbilinie de prima speță nu depinde de orientarea curbei. Într-adevăr, funcțiile $x=\tilde{x}(L-s)$, $y=\tilde{y}(L-s)$, $z=\tilde{z}(L-s)$, $s\in[0,L]$ formează o reprezentare parametrică a curbei γ_-. Dacă notăm cu $u=L-s$ rezultă:

$$\int_{\gamma_-} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^L f\left[\tilde{x}(L-s),\tilde{y}(L-s),\tilde{z}(L-s)\right]\mathrm{d}s=$$

$$=-\int_L^0 f\left[\tilde{x}(u),\tilde{y}(u),\tilde{z}(u)\right]\mathrm{d}u=\int_0^L f\left[\tilde{x}(u),\tilde{y}(u),\tilde{z}(u)\right]\mathrm{d}u=\int_{\gamma_+} f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

În continuare prezentăm interpretarea fizică a integralei curbilinii de prima speță. Într-adevăr, să presupunem că un fir material de grosime neglijabilă are forma curbei γ netedă. Fie $x=\tilde{x}(s),\ y=\tilde{y}(s),\ z=\tilde{z}(s),\ s\in[0,L]$, reprezentarea normală a curbei γ. Notăm cu $\overset{\frown}{AB}$ suportul curbei γ şi cu $\rho:\overset{\frown}{AB}\to \mathbb{R}_+$ funcția (continuă) care exprimă densitatea firului material.

Fie Δ: $0=s_0<s_i<\ldots<s_{i-1}<s_i<\ldots<s_n=L$ o diviziune oarecare a intervalului [0, L] şi fie $M_i\in\overset{\frown}{AB}$ punctul de coordonate $\left(\tilde{x}(s_i),\tilde{y}(s_i),\tilde{z}(s_i)\right)$.

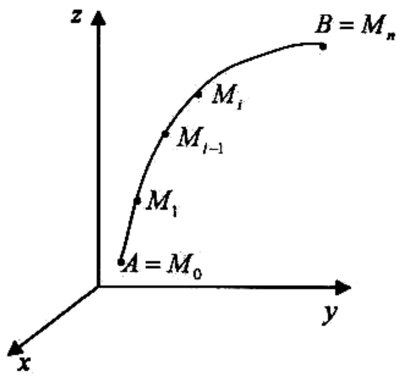


Fig. 1

Precizăm că s_i reprezintă lungimea arcului $\overset{\frown}{AM_i}$. Dacă diviziunea Δ este suficient de fină, putem presupune că pe porțiunea $\overset{\frown}{M_{i-1},M_i}$ densitatea firului este constantă şi anume este egală, de exemplu, cu valoarea funcției ρ într-unul din capete. Aşadar, presupunem că $\rho(M) = \rho(M_i)$, $\forall\ M \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Rezultă că masa porțiunii $\overset{\frown}{M_{i-1},M_i}$ a firului material este aproximativ egală cu produsul $\rho(M_i)(s_i - s_{i-1})$, iar masa întregului fir $\overset{\frown}{AB}$, se aproximează cu suma $\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)(s_i - s_{i-1})$. Valoarea exactă a masei firului material va fi $\mu = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)(s_i - s_{i-1}) = \int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, sensul exact fiind următorul: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului [0, L], cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $\left| \mu - \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)(s_i - s_{i-1}) \right| < \varepsilon$.

În concluzie, $\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ reprezintă masa unui fir material de grosime neglijabilă, care are forma curbei γ de suport $\overset{\frown}{AB}$ şi de densitate $\rho = \rho(x,y,z)$, $\forall\ (x,y,z) \in \overset{\frown}{AB}$.

Dacă notăm cu x_G, y_G şi z_G coordonatele centrului de greutate ale firului material, atunci, procedând ca mai înainte, se arată că:

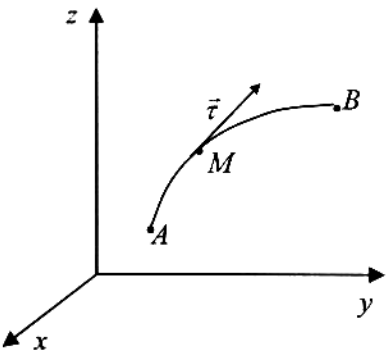
$$x_G = \frac{\int_\gamma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s},\quad y_G = \frac{\int_\gamma y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s},\quad z_G = \frac{\int_\gamma z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}.$$

În cazul unui fir omogen ($\rho(M) = \kappa$, $\forall\ M \in \overset{\frown}{AB}$), rezultă:

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s},\quad y_G = \frac{\int_\gamma y\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s},\quad z_G = \frac{\int_\gamma z\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s}.$$

4.5. INTEGRALA CURBILINIE DE SPEȚA A DOUA

Fie γ o curbă netedă de suport $\overset{\frown}{AB}$ şi fie $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$, reprezentarea sa normală. Vom nota cu $\vec{\tau} = \vec{\tau}(M)$ versorul tangentei la curba γ într-un punct curent $M[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \in \overset{\frown}{AB}$, orientat în sensul creşterii parametrului s. Se ştie că $\vec{\tau} = \left(\frac{d\tilde{x}}{ds}, \frac{d\tilde{y}}{ds}, \frac{d\tilde{z}}{ds}\right)$. Considerăm de asemenea o funcție vectorială $\vec{F} = (P, Q, R)$ definită pe o mulțime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ce conține suportul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei γ, cu valori în $\mathbb{R}^3$. În notația vectorială, în care identificăm orice punct din $\mathbb{R}^3$ cu vectorul său de poziție, avem:



$\vec{\tau} = \frac{d\tilde{x}}{ds}\vec{i} + \frac{d\tilde{y}}{ds}\vec{j} + \frac{d\tilde{z}}{ds}\vec{k} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, unde α, β şi γ sunt unghiurile pe care le face $\vec{\tau}$ cu Ox, Oy şi Oz.

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}, \ \forall \ (x,y,z) \in \Omega.$$

Definiția 4.5.1. *Se numeşte integrala curbilinie de speța a doua a funcției* $\vec{F} = (P, Q, R)$ *pe curba* γ_+, *următoarea integrală definită*:

$$\int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^L \left(P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{x}'(s) + Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{z}'(s)\right) \mathrm{d}s$$

Pentru integrala curbilinie de speța a doua se foloseşte notația $\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$. Aşadar avem:

$$\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, \mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^L \left(P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{x}'(s) + Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{z}'(s)\right) \mathrm{d}s \quad (1)$$

Următoarea teoremă permite calculul integralei curbilinii de speța a doua când reprezentarea parametrică a curbei este oarecare.

Teorema 4.5.1. *Fie γ o curbă netedă şi fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a,b]$ o reprezentare parametrică a sa. Notăm cu γ_+ curba γ orientată în sensul creşterii parametrului t. Dacă $\Omega \in \mathbb{R}^3$ este o mulţime ce conţine suportul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei γ şi $F = (P,Q,R) : A \to \mathbb{R}^3$ este o funcţie vectorială continuă, atunci există integrala curbilinie de speţa a doua pe curba γ_+ şi*

$$\int_{\gamma_+} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \int_a^b \big(P[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]\, y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]\, z'(t) \big)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

Demonstraţie.

Deoarece γ este netedă, rezultă că $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ şi $\tilde{z}$ sunt de clasă C^1 pe [0, L], deci $\vec{\tau} : \overset{\frown}{AB} \to \mathbb{R}^3$ este o funcţie vectorială continuă. Cum şi $\vec{F}$ este continuă, deducem că $\int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}s$ există, deci integrala din membrul stâng are sens. Este evident că şi integrala din membrul drept există, deoarece x, y şi z sunt de clasă C^1 pe [a, b] şi P, Q, R sunt continue pe $\overset{\frown}{AB}$.

Conform definiţiei 4.5.1 $\int_{\gamma_+} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ este egală cu integrala din membrul drept al egalităţii (1). Vom face în această integrală schimbarea de variabilă $s = \lambda(t)$, $t \in [a,b]$ şi obţinem $\tilde{x}[\lambda(t)] = x\left[\lambda^{-1}(\lambda(t))\right] = x(t)$ şi analog $\tilde{y}[\lambda(t)] = y(t)$, $\tilde{z}[\lambda(t)] = z(t)$. De asemenea, ţinând seama de regulile de derivare a funcţiilor compuse şi inverse, avem

$$\tilde{x}'(s)\,\mathrm{d}s = \frac{d}{ds}\left[x\left(\lambda^{-1}(s)\right)\right]\mathrm{d}s = \frac{dx\left[\lambda^{-1}(s)\right]}{d\left[\lambda^{-1}(s)\right]} \cdot \frac{d\left[\lambda^{-1}(s)\right]}{ds}\,\mathrm{d}s =$$
$$= x'(t)\frac{1}{\lambda'(t)} \cdot \lambda'(t)\,\mathrm{d}t = x'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

În mod asemănător avem $\tilde{y}'(s)\,\mathrm{d}s = y'(t)\,\mathrm{d}t$, $\tilde{z}'(s)\,\mathrm{d}s = z'(t)\,\mathrm{d}t$. În urma acestei schimbări de variabilă rezultă:

$$\int_0^L \big(P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{x}'(s) + Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \cdot \tilde{z}'(s) \big)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_a^b \big(P[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]\, y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]\, z'(t) \big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Cu aceasta, teorema este demonstrată.

Observația 4.5.1. Integrala curbilinie de speța a doua depinde de orientarea curbei. Într-adevăr, versorul tangentă la curba γ_- într-un punct curent $M \in \overset{\frown}{AB}$ este egal cu $-\vec{\tau}$, de unde rezultă că:

$$\int\limits_{\gamma_-} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_0^L \vec{F}\cdot(-\vec{\tau})\,\mathrm{d}s = -\int_0^L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = -\int\limits_{\gamma_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z .$$

Exemplul 4.5.1. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, unde

$$\gamma_+ : x = \frac{R}{2}(1+\cos t), y = \frac{R}{2}(1-\cos t), z = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t ,\ t \in [0, 2\pi] .$$

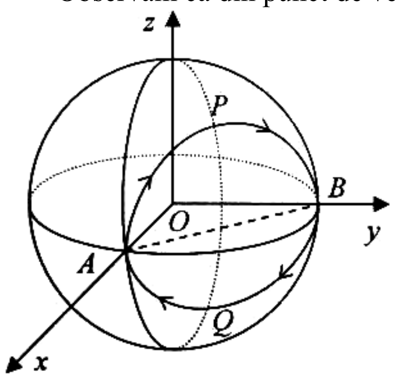
Conform Teoremei 4.5.1 avem:

$$\int\limits_{\gamma+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R}{2}(1+\cos t)\left(-\frac{R}{2}\sin t \right) + \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t \left(\frac{R}{2}\sin t \right) + \frac{R}{2}(1+\cos t)\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}} .$$

Observăm că din punct de vedere geometric, suportul curbei γ este cercul



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y = R. \end{cases}$$

Acest cerc se află în planul $x + y = R$ care este paralel cu axa Oz şi trece prin punctele $A(R,0,0)$ şi $B(0,R,0)$; segmentul [AB] este un diametru al său. Cercul are centrul în punctul $\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},0\right)$ şi raza $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Dacă notăm cu $P\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ şi cu $Q\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},-\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ alte două puncte ale cercului, constatăm că punctul A corespunde valorii $t = 0$, a parametrului, P corespunde valorii $t = \frac{\pi}{2}$, B corespunde valorii $t = \pi$ şi Q corespunde valorii $t = \frac{3\pi}{2}$. Aşadar, curba γ_+ este cercul din planul $x + y = R$, de centru $\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},0\right)$ şi raza $\frac{R}{\sqrt{2}}$, orientat în sensul $APBQA$.

Observația 4.5.2. Dacă curba γ este dată printr-o reprezentare parametrică, γ_+ reprezintă curba γ orientată în sensul creșterii parametrului. Dacă însă curba γ este o curbă închisă și este dată ca o intersecție de două suprafețe, atunci orientarea curbei nu este evidentă și trebuie indicată prin enunț. De exemplu, în cazul cercului de mai sus, se poate specifica faptul că acesta este parcurs în sensul acelor unui ceasornic dacă privim din punctul O, originea sistemului de axe. Faptul că este vorba de o curbă închisă, se poate marca printr-un cerc pe semnul integralei. Exemplul 4.5.1 se poate reformula astfel: Să se calculeze $\oint\limits_{\gamma_+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$ unde γ_+ este cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y = R \end{cases}$ parcurs în sensul acelor unui ceasornic dacă privim din centrul sferei.

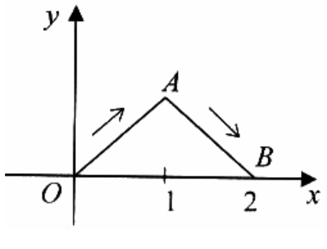
Observația 4.5.3. Dacă γ este netedă pe porțiuni (este o justapunere de curbe netede: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_p$, atunci

$$\int\limits_{\gamma_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{(\gamma_i)_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z\,.$$

Observația 4.5.4. În cazul unei curbe plane, formula (2) devine:

$$\int\limits_{\gamma_+} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \big(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\mathrm{d}t\,.$$

Exemplul 4.5.2. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma_+} (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$, unde γ_+ este graficul curbei $y = 1 - |1-x|$, $x \in [0, 2]$. Explicitând modulul obținem:



$$y = \begin{cases} x & \text{dacă} \quad x \in [0,1] \\ 2-x & \text{dacă} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Cum $\gamma_+ = \overline{OA} \cup \overline{AB}$ rezultă $\int\limits_{\gamma_+} = \int\limits_{\overline{OA}} + \int\limits_{\overline{AB}}$.

Deoarece $x = t$, $y = t$, $t \in [0,1]$ este o reprezentare parametrică a segmentului $\overline{OA}$, din Observația 4.5.4 deducem:

$$\int\limits_{\overline{OA}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 2t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

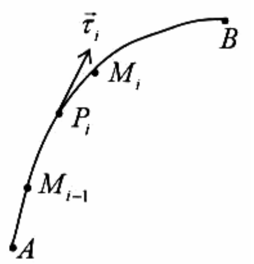
Pe de altă parte, o reprezentare parametrică a segmentului $\overline{AB}$ este $x = t$, $y = 2 - t$, $t \in [1,2]$. Rezultă:

$$\int\limits_{\overline{AB}} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\Big[\left(t^2+(2-t)^2\right)(1)+\left(t^2-(2-t)^2\right)(-1)\Big]\mathrm{d}t=$$

$$=2\int_1^2(2-t)^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}.$$

Aşadar, $\displaystyle\int\limits_{\gamma_+}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$.

Pentru interpretarea fizică a integralei curbilinii de speţa a doua, considerăm o curbă netedă γ, de suport $\overset{\frown}{AB}$. Fie $x=\tilde{x}(s)$, $y=\tilde{y}(s)$ şi $z=\tilde{z}(s)$, $s\in[0,L]$ reprezentarea normală a curbei γ_+, fie $\vec{F}=(P,Q,R):\overset{\frown}{AB}\subset\mathbb{R}^3$ o funcţie vectorială continuă şi fie $\Delta: 0=s_0<s_1<\ldots<s_{i-1}<s_i<\ldots<s_n=L$ o diviziune oarecare a intervalului [0, *L*]. Notăm cu M_i punctul de coordonate $\left(\tilde{x}(s_i),\tilde{y}(s_i),\tilde{z}(s_i)\right)$. Lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ este egală cu s_i-s_{i-1}. Fie $\xi_i\in[s_{i-1},s_i]$ un punct arbitrar, fie $P_i\left[\tilde{x}(\xi_i),\tilde{y}(\xi_i),\tilde{z}(\xi_i)\right]$ punctul corespunzător de pe arcul $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ şi fie $\vec{\tau}_i$ versorul tangentei în P_i la curba γ_+.



Dacă diviziunea Δ este suficient de fină, putem presupune că funcţia vectorială $\vec{F}=(P,Q,R)$ pe care o interpretăm ca o forţă, este constantă pe arcul $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ şi anume este egală cu valoarea sa în punctul P_i. În aceste condiţii, lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ sub acţiunea forţei $\vec{F}$ se poate aproxima cu $\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i(s_i-s_{i-1})$, unde cu $\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i$ am notat produsul scalar al celor doi vectori. Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ sub acţiunea forţei variabile $\vec{F}$ se aproximează cu suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i(s_i-s_{i-1})$. Valoarea exactă a lucrului mecanic va fi egal cu:

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i(s_i-s_{i-1})=\int\limits_{\gamma_+}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$$

În consecință $\int\limits_{\gamma_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe curba γ_+ sub acțiunea forței variabile $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

4.6 INDEPENDENȚA DE DRUM A INTEGRALEI CURBILINII DE SPEȚA A DOUA

În acest paragraf vom analiza cazul când integrala curbilinie de speța a doua depinde numai de extremitățile curbei şi nu depinde de curba însăşi. Acest caz este interesant atât din punct de vedere matematic, deoarece calculul unei astfel de integrale este mai simplu, cât şi din punct de vedere practic, deoarece are aplicații în termodinamică.

Definiția 4.6.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă şi fie P, Q, R : $A \to$ P, trei funcții oarecare. Se numeşte formă diferențială de gradul întâi pe mulțimea A, de coeficienți P, Q şi R, următoarea expresie:* $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, $\forall\ (x,y,z) \in A$. *Dacă, în plus P, Q şi R sunt de clasă C^P pe A, atunci ω se numeşte formă diferențială de gradul întâi, de clasă C^P .*

Exemplul 4.6.1. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă pe *A*, atunci diferențiala sa de ordinul întâi: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ este o formă diferențială de gradul întâi pe *A*, de coeficienți $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Formele diferențiale de tipul celui din Exemplul 4.6.1 se numesc exacte. Mai precis:

Definiția 4.6.2. *Forma diferențială de gradul întâi* $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, $\forall\ (x,y,z) \in A$ *se numeşte exactă, dacă există o funcție $f \in C^1(A)$ astfel încât $\omega = df$, ceea ce revine la următoarele egalități pe A*: $\quad P = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q = \frac{\partial f}{\partial y},\ R = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Observația 4.6.1. Dacă considerăm câmpul vectorial $\vec{v} : A \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\forall\ (x,y,z) \in A$, atunci forma diferențială ω , de coeficienți *P*, *Q* şi *R*, este exactă pe *A*, dacă $\vec{v}$ este un câmp de

potenţial, adică dacă $\exists\ f \in C^1(A)$ astfel încât $\vec{v} =$ grad f (Vezi [10], Definiţia 4.14.4).

Teorema 4.6.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi fie P, Q, şi R trei funcţii reale, continue pe D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Forma diferenţială* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ *este exactă pe D*;

(ii) $\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$, *pentru orice curbă închisă γ, netedă pe porţiuni, al cărui suport este inclus în D*;

(iii) $\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$ *nu depind de drum în domeniul D, în sensul următor: oricare ar fi două puncte A, B ∈ D şi oricare ar fi două curbe netede pe porţiuni, γ_1 şi γ_2 care au suporturile incluse în D şi au aceleaşi capete A şi B avem:*

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy + Rdz$$

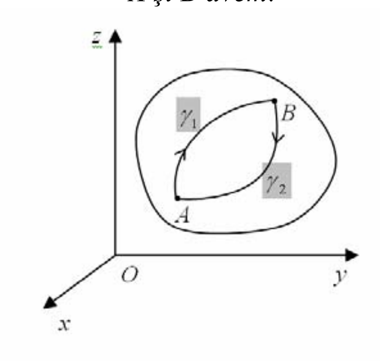


Fig. 1

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (iii). Prin ipoteză, există $f \in C^1(D)$ astfel încât:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q = \frac{\partial f}{\partial y},\ R = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

Fie A şi B două puncte oarecare din D şi fie γ o curbă netedă pe porţiuni, al cărui suport $\overset{\frown}{AB}$ este inclus în D. Dacă $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t), t \in [a,b]$, este o reprezentare parametrică a curbei γ, atunci A are coordonatele $(x(a), y(a), z(a))$ iar B are coordonatele $(x(b), y(b), z(b))$.

Fie F: $[a, b] \to$ P, funcţia compusă definită astfel:

$F(t) = f[x(t), y(t), z(t)]$, $t \in [a, b]$.

Ţinând seama de formulele de derivare ale funcţiilor compuse şi de egalităţile (1) rezultă:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}[x(t), y(t), z(t)]z'(t) = \\ &= P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Egalitatea (2) este valabilă pentru orice punct $t \in [a, b]$ cu excepţia unui număr finit de puncte şi anume, acele puncte $t \in [a, b]$ care corespund punctelor de justapunere a curbelor ce compun γ. Cum egalitatea (2) este adevărată pe $[a, b]$ cu excepţia unei mulţimi neglijabile rezultă:

$$\int_{\gamma_+} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_a^b \left(P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t) \right) dt =$$

$$= \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(B) - f(A)$$

Aşadar, valoarea integralei nu depinde de forma curbei γ şi depinde numai de capetele sale.

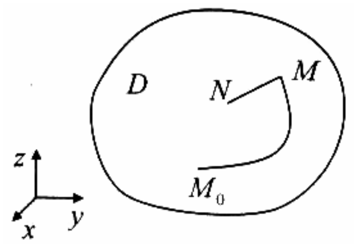


Fig. 2

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ un punct fixat, fie $M(x, y, z) \in D$ un punct oarecare şi fie γ o curbă netedă pe porţiuni, al cărui suport $\overset{\frown}{M_0M}$ este inclus în *D*.

Deoarece prin ipoteză, integrala nu depinde de drum în domeniul *D*, rezultă că putem defini o funcţie $f : D \to$ P, astfel:

$$f(x, y, z) = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy + Rdz, \quad \forall$$

$M(x, y, z) \in D$.

Fie $N(x+h, y, z) \in D$ şi fie $x = t$, $y = y$, $z = z$, $t \in [x, x+h]$ o reprezentare parametrică a segmentului de drepte $\overline{MN}$. Avem:

$$f(x+h, y, z) = \int_{\overset{\frown}{M_0M} \cup \overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{\overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Ţinând seama de Corolarul 2.4.3 de la Teorema de medie rezultă:

$$\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \frac{\int_{\overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_x^{x+h} P(t, y, z)\,dt}{h \qquad\qquad h} = \frac{P(\xi, y, z)h}{h},$$

unde ξ este un punct cuprins între *x* şi *x* + *h*. Folosind din nou faptul că *P* este continuă, rezultă că există $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$.

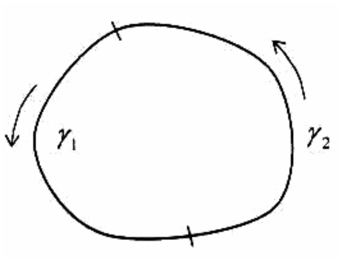
Aşadar, $\frac{\partial f}{\partial x} = P$.

În mod asemănător, înlocuind segmentul $\overline{MN}$ cu un segment paralel cu axa *Oy* (respectiv *Oz*) se arată că $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ şi $\frac{\partial f}{\partial z} = R$, deci ω este exactă.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Fie γ_1, γ_2 curbele din Figura 1 şi fie $\gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2)_-$. Evident γ este o curbă închisă, netedă pe porţiuni, al cărui suport este inclus în D. Din (iii) rezultă că $\oint_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Dar $\oint_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{(\gamma_2)_-} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0$.

Aşadar $\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$, adică ($ii$).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Fie γ o curbă închisă, netedă pe porţiuni, al cărui suport este inclus în D, fie $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ reprezentare parametrică a sa şi fie $a < c < b$ oarecare. Notăm cu γ_1 curba a cărei reprezentare parametrică este $r = r(t)$, $t \in [a, c]$ şi cu γ_2 curba $r = r(t)$, $t \in [c, b]$. Evident $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Prin ipoteză $\int_{(\gamma_1)_+} = \int_{(\gamma_2)_-}$, de unde rezultă $\int_\gamma = \int_{(\gamma_1)_+} + \int_{(\gamma_2)_-} = 0$.



Definiţia 4.6.3. *O formă diferenţială de ordinul întâi* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ *se numeşte închisă pe domeniul* $D \subset \mathbb{R}^3$, *dacă P, Q, R sunt de clasă* C^1 *pe D şi dacă* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial z}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$.

Observaţia 4.6.2. Dacă considerăm câmpul vectorial $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}, \ \forall\ (x,y,z) \in D$$

atunci ω este închisă dacă şi numai dacă câmpul $\vec{v}$ este irotaţional, adică dacă

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Teorema 4.6.2. *Dacă* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ *este exactă şi este de clasă* C^1 *pe D, atunci* ω *este închisă pe D.*

Demonstraţie. Prin ipoteză există $f \in C^2(D)$ astfel încât $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Deoarece, în acest caz, derivatele de ordinul doi ale lui f sunt continue, rezultă că derivatele mixte sunt egale. Avem:

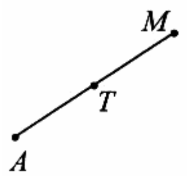
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definiția 4.6.4. *O mulțime $S\subset\mathbb{R}^3$ se numeşte stelată dacă există un punct $A\in S$ cu proprietatea că $\forall\ M\in S$, segmentul de dreaptă de capete A şi M, pe care-l notăm $[A,M]$ este inclus în S. Reamintim că*
$[A,M]=\{(1-t)\,A+t\,B\,|\,t\in[0,1]\}$.

Observația 4.6.3. Orice mulțime convexă este stelată, în timp ce afirmația reciprocă nu este în general adevărată. De exemplu mulțimea $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0);\ x>0\}$ este stelată (în raport cu $O(0,0)$) dar nu exte convexă.

Teorema 4.6.3. *Dacă $D\subset\mathbb{R}^3$ esteo mulțime stelată şi deschisă, atunci orice formă diferențială închisă pe D este exactă pe D.*

Demonstrație. Prin ipoteză, există $A\in D$ astfel încât $[A,M]\subset D$, $\forall\ M\in D$.



Să presupunem că A are coordonatele (a, b, c) iar M are coordonatele (x, y, z). Fie $t\in[0,1]$ oarecare şi fie
$T=(1-t)\,A+t\,B=\big((1-t)\,a+t\,x,\ (1-t)\,b+t\,y,\ (1-t)\,c+t\,z\big)$,
punctul corespunzător de pe segmentul $[A,M]$. Definim o funcție $f:D\to$ P, astfel:

$$f(x,y,z)=\int_0^1\big[P(T)(x-a)+Q(T)(y-b)+R(T)(z-c)\big]\mathrm{d}t$$

.

Ținând seama de teorema de derivare a integralei cu parametru (Teorema 3.2.2) rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int_0^1\left(\frac{\partial P}{\partial x}(T)\frac{\partial T}{\partial x}(x-a)+P(T)+\frac{\partial Q}{\partial x}(T)\frac{\partial T}{\partial x}(y-b)+\frac{\partial R}{\partial x}(T)\frac{\partial T}{\partial x}(z-c)\right)\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1\left(\frac{\partial P}{\partial x}(T)\,t(x-a)+P(T)+\frac{\partial Q}{\partial x}(T)\,t(y-b)+\frac{\partial R}{\partial x}(T)\,t(z-c)\right)\mathrm{d}t.$$

Pe de altă parte, prin ipoteză avem $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int_0^1\left(\frac{\partial P}{\partial x}(T)\,t(x-a)+\frac{\partial P}{\partial y}(T)\,t(y-b)+\frac{\partial P}{\partial z}(T)\,t(z-c)+P(T)\right)\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1\frac{d}{dt}\big(tP(T)\big)\mathrm{d}t=tP(T)\Big|_0^1=1\cdot P(M)-0\cdot P(A)=P(M)=P(x,y,z).$$

Aşadar, $\frac{\partial f}{\partial x}=P$ şi analog $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$, $\frac{\partial f}{\partial z}=R$, deci ω este exactă.

Exemplul 4.6.2. Să se calculeze $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+zxdy+xydz$. Dacă notăm cu $P(x,y,z)=yz$, $Q(x,y,z)=zx$ şi $R(x,y,z)=xy$, atunci forma diferenţială $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ este închisă pe $\mathbb{R}^3$ deoarece $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=z$; $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=x$; $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=y$. Din Teorema 4.6.3. rezultă că ω este exactă, iar din Teorema 4.6.1 că integrala nu depinde de drum. Aşadar, problema are sens. Deoarece integrala nu depinde de drum, calculul său se poate face alegând un drum avantajos şi anume alegem linia frântă determinată de punctele $A(1,2,3)$, $B(6.2.3)$, $C(6,1,3)$, $D(6,1,1)$.

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+zxdy+xydz=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}=\int_1^6 2\cdot 3dt+\int_2^1 6\cdot 3dt+\int_3^1 6\cdot 1dt=$$
$$=30-18-12=0.$$

O soluţie mai simplă se poate da, dacă observăm că $\omega = df$, unde $f(x,y,z)=xyz$. Atunci $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+zxdy+xydz=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6.1.1)}=6-6=0$.

Observaţia 4.6.4. În plan, o formă diferenţială $\omega=Pdx+Qdy$ este închisă, dacă $P,Q\in C^1$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Exemplul 4.6.2. Să se calculeze $\oint_\gamma (2y^2-4y+x)dx+4x(y-1)dy$, unde γ este cercul $x^2+y^2-2y=0$.

Dacă norăm cu $P(x,y)=2y^2-4y+x$ şi cu $Q(x,y)=4x(y-1)$, atunci $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=4(y-1)$. Rezultă că $\omega=Pdx+Qdy$ este închisă în $\mathbb{R}^2$, deci este exactă în $\mathbb{R}^2$. Cum γ este o curbă închisă, din Teorema 4.6.1 rezultă că valoarea integralei este 0, deci nu e necesar nici un calcul.

CAPITOLUL 5

INTEGRALE MULTIPLE

5.1. ARIA UNEI MULȚIMI PLANE

În cele ce urmează, prin mulțime plană poligonală, vom înțelege orice mulțime din plan mărginită de un poligon. În particular, prin mulțime plană dreptunghiulară (triunghiulară) înțelegem o mulțime plană a cărei frontieră este un dreptunghi (triunghi). Cititorul este familiarizat cu noțiunea de arie a unei mulțimi plane poligonale de la cursul de geometrie elementară. În acest paragraf vom da un sens noțiunii de mulțime care are arie, pentru o clasă de mulțimi mai generală decât clasa mulțimilor poligonale.

Definiția 5.1.1 *Prin mulțime elementară* (*în plan*) *înțelegem orice reuniune finită de mulțimi plane dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.*

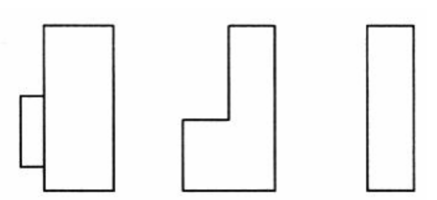


Fig. 1

Facem precizarea că orice reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulțime elementară.

Așadar, o mulțime $E \subset \mathbb{R}^2$ este elementară, dacă există un număr finit de dreptunghiuri (pline) $D_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, $i = \overline{1, p}$ astfel încât $E = \bigcup_{i=1}^{p} D_i$ și $\overset{\circ}{D_i} \cap \overset{\circ}{D_j} = \varnothing$ pentru $i \neq j$. Se știe că aria unui dreptunghi este egală cu produsul lungimilor laturilor, deci $\text{aria}\, D_i = (b_i - a_i)(d_i - c_i)$. Prin definiție, aria mulțimii elementare E este

$$\text{aria}\, E = \sum_{i=1}^{p} \text{aria}\, D_i \,. \tag{1}$$

În continuare, vom nota cu $\mathcal{E}$ familia mulțimilor elementare din plan. Dacă $A \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime mărginită, atunci vom nota cu:

$S_*(A) = \sup\{\text{aria}\, E;\ E \subset A,\ E \in \mathcal{E}\}$ și

$S^*(A) = \inf\{\text{aria}\, F;\ F = A,\ E \in \mathcal{E}\}$.

În cazul când mulţimea A nu conţine nici o mulţime elementară, vom defini $S_*(A)=0$. Cu această precizare, este evident că cele două margini există şi că $S_*(A)\le S^*(A)$.

Definiţia 5.1.2 *Spunem că o mulţime mărginită $A\subset \mathbb{R}^2$ este măsurabilă* (*are arie*) *în sensul lui Jordan, dacă $S_*(A)=S^*(A)=S(A)$. Valoarea comună $S(A)$ se numeşte aria mulţimii A.*

Observaţia 5.1.1 Orice mulţime elementară are arie în sensul Definiţiei 5.1.2 şi aceasta coincide cu aria definită în (1), adică cu suma ariilor dreptunghiulare care o compun.

Observaţia 5.1.2 Orice mulţime poligonală are arie în sensul Definiţiei 5.1.2 şi aceasta coincide cu aria cunoscută din geometria elementară. Într-adevăr, deoarece orice mulţime poligonală este o reuniune finită de mulţimi triunghiulare şi orice triunghi este reuniunea sau diferenţa a două triunghiuri dreptunghice, este suficient să arătăm că orice mulţime plană a cărei frontieră este un triunghi dreptunghic are arie. Fie un triunghi dreptunghic ABC, $\hat{A}$ = 90, $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$. Împărţim cateta AB în n părţi egale şi considerăm dreptunghiuri de tipul $MNPQ$ unde $\overline{MN}=\dfrac{a}{n}$ şi MP este paralelă cu AB. Să presupunem că $\overline{BM}=i\cdot\dfrac{a}{n}$. Din asemănarea triunghiurilor BMP şi BAC rezultă $\dfrac{\overline{BM}}{a}=\dfrac{\overline{MP}}{b}$,

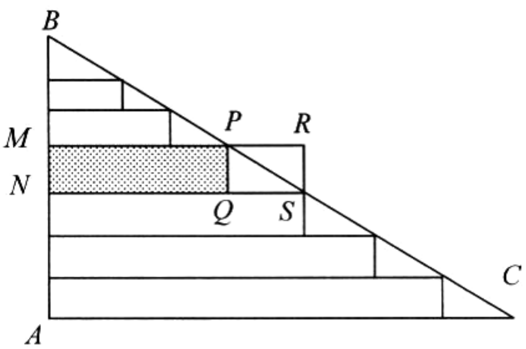


Fig. 2

deci $\overline{MP}=i\cdot\dfrac{b}{n}$. Aşadar, aria dreptunghiului $MPQM$ este $i\cdot\dfrac{ab}{n^2}$. Dacă notăm cu E reuniunea acestor dreptunghiuri, atunci $E\in \mathsf{E}$, E este inclusă în mulţimea triunghiului ABC şi aria $E=\dfrac{ab}{n^2}\left(1+2+\ldots+(n-1)\right)=\dfrac{ab(n-1)}{2n}$. În mod analog, dacă notăm cu F reuniunea dreptunghiurilor de tipul $MRSN$, atunci F este o mulţime elementară care include triunghiul ABC şi aria $F=\dfrac{ab}{n^2}\left(1+2+\ldots+n\right)=\dfrac{ab(n+1)}{2n}$. În continuare avem

$$\frac{ab}{2} = \sup_n \frac{ab(n-1)}{2n} \le S_*(\Delta ABC) \le S^*(\Delta ABC) \le \inf_n \frac{ab(n+1)}{n} = \frac{ab}{2},$$

deci $S_*(\Delta ABC) = S^*(\Delta ABC) = \frac{ab}{2}$. Aşadar, mulţimea triunghiulară *ABC* are arie în sensul Definiţiei 5.1.2 şi aceasta coincide cu aria triunghiului dreptunghic cunoscută din geometria elementară.

Definiţia 5.1.3. *Prin mulţimea elementară poligonală înţelegem orice reuniune finită de mulţimi poligonale care nu au puncte interioare comune.*

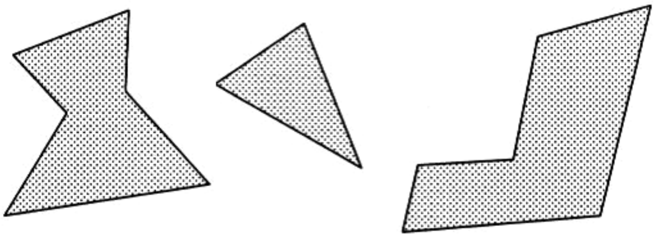


Fig. 3

Propoziţia 5.1.1. *Orice mulţime elementară poligonală este inclusă într-o mulţime elementară de arie cel mult de 8 ori aria mulţimii elementare poligonale iniţială.*

Demonstraţie

Demonstraţia se bazează pe următoarele observaţii:

1) Orice mulţime poligonală este o reuniune finită de mulţimi triunghiulare;
2) Orice triunghi (plin) este reuniunea sau diferenţa a două triunghiuri (pline) dreptunghice;
3) Orice triunghi dreptunghic este inclus într-un dreptunghi de arie de două ori mai mare ca aria sa;
4) Orice dreptunghi este o reuniune finită de pătrate şi un dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 şi 2.

Într-adevăr, fie *D* un dreptunghi de laturi *a* şi *b* cu $\frac{a}{b} > 2$.

Fie $r = \frac{m}{n}$ un număr raţional cu proprietatea

$$\frac{a}{b} - 2 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b} - 1 \tag{2}$$

şi fie D_1 dreptunghiul de laturi *b* şi $\frac{m}{n}b$, iar D_2 dreptunghiul de laturi *b* şi $a - \frac{m}{n}b$.

Evident $D = D_1 \bigcup D_2$. Observăm că dreptunghiul D_1 este reuniunea a $n \times m$ pătrate de latură $\frac{b}{n}$. Pe de altă parte, din (2) rezultă $a - 2b < \frac{m}{n} b < a - b$ şi mai departe $b < a - \frac{m}{n} b < 2b$. Aşadar, avem $1 < \dfrac{a - \frac{m}{n} b}{b} < 2$, deci raportul laturilor dreptunghiului D_2 este cuprins între 1 şi 2.

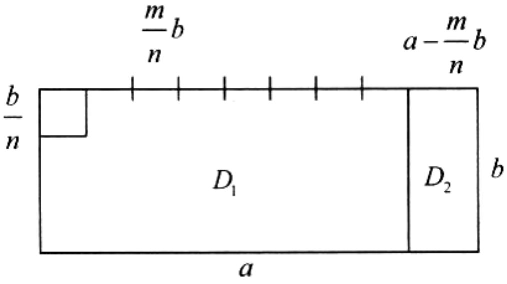


Fig. 4

5) Orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 şi 2 este inclus într-un pătrat de arie cel mult dublul ariei dreptunghiului iniţial.

6) Orice pătrat este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate şi de arie dublă. Ţinând seama şi de 5) rezultă că orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 şi 2 este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate şi de arie cel mult de 4 ori aria dreptunghiului iniţial.

Din cele de mai sus rezultă că orice mulţime poligonală poate fi inclusă într-o reuniune finită de mulţimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate de arie cel mult de 8 ori aria mulţimii poligonale iniţiale.

În sfârşit, să observăm că orice reuniune finită de mulţimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulţime elementară având aceeaşi arie.

Observaţie 5.1.3. Există mulţimi plane care nu au arie.

Într-adevăr, fie funcţia lui Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ şi fie $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le D(x) \right\}$.

Se observă imediat, în acest caz, că $S_*(A) = 0$ şi $S^*(A) = 1$, deci mulţimea A nu este măsurabilă (nu are arie).

Următoarea propoziţie ne furnizează exemple de mulţimi care au arie. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ şi fie Γ_f subgraficul său, adică mulţimea

$\Gamma_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \right\}$.

Propoziţia 5.1.2 *Dacă f este integrabilă pe* [*a*, *b*], *atunci subgraficul său* Γ_f *are arie şi* aria$\left(\Gamma_f\right) = \int_a^b f(x)dx$.

Demonstrație.

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ şi fie m_i (respectiv M_i) marginea inferioară (superioară) a funcției f pe intervalul $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Dacă notăm cu $E_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \left[x_{i-1}, x_i\right] \times \left[0, m_i\right]$, atunci $E_\Delta \in \mathcal{E}$, $E_\Delta \subset \Gamma_f$ şi $\text{aria}\left(E_\Delta\right) = \sum_{i=1} m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = s_\Delta$ unde cu s_Δ am notat suma Darboux inferioară. Rezultă că $s_\Delta \le S_*\left(\Gamma_f\right)$.

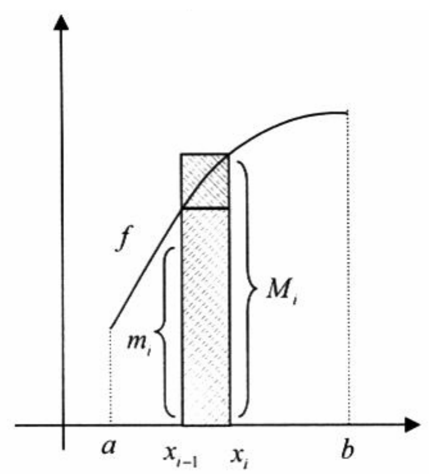


Fig. 5

În mod analog, dacă notăm cu $F_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \left[x_{i-1}, x_i\right] \times \left[0, M_i\right]$, atunci $F_\Delta \in \mathcal{E}$, $F_\Delta \supset \Gamma_f$ şi $\text{aria}\left(F_\Delta\right) = S_\Delta \ge S^*\left(\Gamma_f\right)$.

Aşadar avem:

$$s_\Delta \le S_*\left(\Gamma_f\right) \le S^*\left(\Gamma_f\right) \le S_\Delta \qquad (3)$$

Faptul că f este integrabilă pe $[a, b]$ implică: $I_* = \sup_\Delta s_\Delta = \inf_\Delta S_\Delta = I^* = \int_a^b f(x)dx$.

În sfârşit, din (3) rezultă $S_*\left(\Gamma_f\right) = S^*\left(\Gamma_f\right) = \int_a^b f(x)dx$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

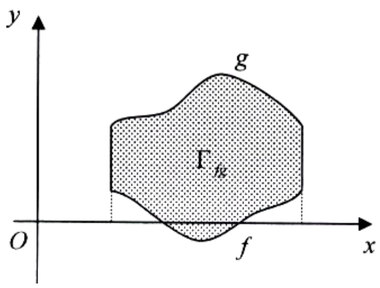


Fig. 6

Fie f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietatea $f(x) \le g(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$ şi fie $\Gamma_{fg} = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\right\}$.

Corolarul 5.1.1. *Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci mulțimea Γ_{fg} are arie şi* $\text{aria}\left(\Gamma_{fg}\right) = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx$.

Exemplul 5.1.1. Să se calculeze aria elipsei.

Ecuația elipsei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Din motive de simetrie este suficient să calculăm un sfert din aria elipsei, de exemplu aria mulțimii haşurate în figura 6.

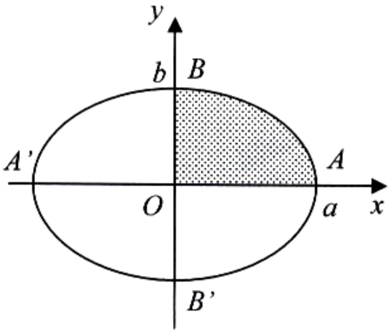


Fig. 7

Arcul $\overset{\frown}{BA}$ este graficul funcției $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[0,a]$.

Conform Propoziției 5.1.1 avem:

$$\frac{1}{4}\text{aria}(\text{elipsei}) = f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a =$$

$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}$. Aşadar aria elipsei de semiaxe a şi b este egală cu πab.

Teorema 5.1.1. *Fie $A\subset\mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca mulțimea A să aibă arie este ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe două mulțimi elementare E_ε şi F_ε cu proprietățile: $E_\varepsilon\subset A\subset F_\varepsilon$ şi* aria$(F_\varepsilon)-$aria$(E_\varepsilon)<\varepsilon$.

Demonstrație

Necesitatea: Dacă $S_*(A)=S^*(A)=S(A)$, atunci din definiția marginii superioare (inferioare) rezultă că există $E_\varepsilon\in\mathcal{E}$, $E_\varepsilon\subset A$ astfel încât $S(A)-\frac{\varepsilon}{2}<$ $<$ aria(E_ε) şi există $F_\varepsilon\in\mathcal{E}$, $F_\varepsilon\supset A$ astfel încât aria$(F_\varepsilon)<S(A)+\frac{\varepsilon}{2}$. Aşadar, avem aria$(F_\varepsilon)-$aria$(E_\varepsilon)<\varepsilon$.

Suficiența. Dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există $E_\varepsilon, F_\varepsilon\in\mathcal{E}$ cu proprietățile: $E_\varepsilon\subset A\subset F_\varepsilon$ şi aria$(F_\varepsilon)-$aria$(E_\varepsilon)<\varepsilon$, atunci avem: $0\le S^*(A)-S_*(A)<\varepsilon$. Cum $\varepsilon>0$ a fost arbitrar, rezultă că $S^*(A)=S_*(A)$, deci A are arie.

Definiția 5.1.4. *Spunem că mulțimea $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ este de arie zero dacă poate fi inclusă într-o mulțime elementară de arie oricât de mică. Cu alte cuvinte, dacă $\forall\ \varepsilon>0$ există o mulțime elementară $F\supset\Gamma$ cu* aria(F) $<\varepsilon$. *În particular avem $S^*(\Gamma)=0$ şi cum $0\le S_*(\Gamma)\le S^*(\Gamma)$ rezultă că Γ are arie şi că* aria(Γ) = 0. *Cu această definiție Teorema 5.1.1. se poate reformula astfel:*

Teorema 5'.1.1. *Fie $A\subset\mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca mulțimea A să aibă arie este ca frontiera sa Γ să fie de arie zero.*

Demonstrație.

Dacă A are arie, atunci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \mathcal{E}$ cu proprietățile $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$ şi $\text{aria}\left(F_\varepsilon \setminus E_\varepsilon\right) = \text{aria}\left(F_\varepsilon\right) - \text{aria}\left(E_\varepsilon\right) < \varepsilon$. Cum $\Gamma = fr.A \subset F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$ şi $F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$ este de asemenea o mulțime elementară, rezultă că Γ este de arie zero.

Afirmația reciprocă rezultă din Observația că orice mulțime elementară care conține frontiera Γ a mulțimii A se poate scrie ca diferența a două mulțimi elementare $F \setminus E$ cu $E \subset A \subset F$.

Corolarul 5.1.2. *Graficul oricărei funcții continue* $f : [a, b] \to$ P *este o mulțime de arie zero.*

Într-adevăr, funcția f fiind continuă, este integrabilă şi conform Propoziției 5.1.1 subgraficul său are arie. Afirmația rezultă acum din Teorema 5'.1.1.

Corolarul 5.1.3. *Orice mulțime plană a cărei frontieră este o reuniune finită de grafice de funcții continue, are arie.* (*Afirmația rezultă din Corolarul 5.1.2, din observația că o reuniune finită de mulțimi de arie zero este de asemenea de arie zero şi din Teorema 5'.1.1*).

Teorema 5"1.1. *O mulțime mărginită* $A \subset \square^2$ *are arie dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există două mulțimi elementare poligonale* P_ε *şi* Q_ε *cu proprietățile:* $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ *şi* $\text{aria}\, Q_\varepsilon - \text{aria}\, P_\varepsilon < \varepsilon$.

Afirmația rezultă din Propoziția 5.1.1 şi din Teorema 5.1.1.

Observația 5.1.4. Orice disc (mulțime plană a cărei frontieră este un cerc) are arie.

Într-adevăr, dacă notăm cu P_n (respectiv Q_n) mulțimea poligonală a cărei frontieră este poligonul regulat cu n laturi înscris (respectiv circumscris) în cerc, atunci $\text{aria}Q_n - \text{aria}P_n$ este oricât de mică pentru n suficient de mare.

În continuare notăm cu (θ, ρ) coordonatele polare în plan.

Propoziția 5.1.3. *Fie* $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ *o funcție continuă şi fie* $A = \left\{(\theta, \rho) \middle| \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le \rho \le \rho(\theta)\right\}$. *Atunci A are arie şi* $\text{aria}A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\, d\theta$.

Demonstrație

Fie $\Delta_n : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_n = \beta$ o diviziune echidistantă a intervalului $[\alpha, \beta]$.

Fie m_i (respectiv M_i) marginea inferioară (superioară) a funcției $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$. Aria sectorului de cerc $OR_iP_i = \{(\theta,\rho) \mid \theta_{i-1} \le \theta \le \theta_i,\ 0 \le \rho \le \rho(\theta)\}$

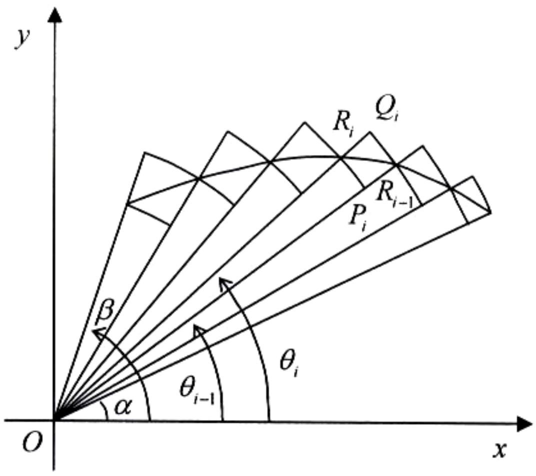


Fig. 8

este egală cu $\frac{1}{2}m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$, iar aria sectorului de cerc OQ_iR_{i-1} este egală cu $\frac{1}{2}M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$.

Dacă notăm cu P_n (respectiv Q_n) reuniunea celor n sectoare de cerc OR_iP_i (respectiv OQ_iR_{i-1}) atunci $P_n \subset A \subset Q_n$ şi

aria $P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ iar

aria $Q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$.

Observăm că cele două sume sunt sumele Darboux asociate funcției $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ şi diviziunii Δ_n. Ținând seama că $\|\Delta_n\| = \frac{\beta - \alpha}{n} \to 0$ şi funcția $\frac{1}{2}\rho^2$ este integrabilă pe $[\alpha, \beta]$, rezultă că există

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria}\, P_n = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\, Q_n = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta \tag{4}$$

Pe de altă parte, deoarece P_n (respectiv Q_n) are arie pentru $\forall\ \varepsilon > 0$ există o mulțime elementară E_n (respectiv F_n), $E_n \subset P_n \subset A \subset Q_n \subset F_n$ astfel încât aria $P_n -$ aria $E_n < \frac{\varepsilon}{3}$ şi aria $F_n -$ aria $Q_n < \frac{\varepsilon}{3}$. În plus, ținând seama de (4) putem presupune că aria $Q_n -$ aria $P_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Aşadar, avem aria $F_n -$ aria $E_n < \varepsilon$, deci mulțimea A are arie şi aria $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta$.

Teorema 5.1.2. *Suportul unei curbe rectificabile este o mulțime de arie zero.*

Demonstrație.

Fie $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ drumul parametrizat rectificabil care determină curba γ, definit prin $r(t) = (x(t), y(t))$. Fie L lungimea acestui drum şi fie $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $s \in [0, L]$ reprezentarea sa naturală (Vezi Cap. 4, §4.3).

Fie $\Delta_n : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{i-1} < s_i < \ldots < s_n = L$ o diviziune echidistantă a intervalului [0, L] şi fie M_i punctul de coordonate $(\tilde{x}(s_i), \tilde{y}(s_i))$ de pe suportul curbei γ. Lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ este $\dfrac{L}{n}$. Considerăm un pătrat D_i cu centrul în M_i şi laturile paralele cu axele de coordonate, de latură $\dfrac{2L}{n}$. Este evident că suportul curbei γ (imaginea funcției vectoriale r) este inclus în $\bigcup_{i=0}^{n} D_i$ şi

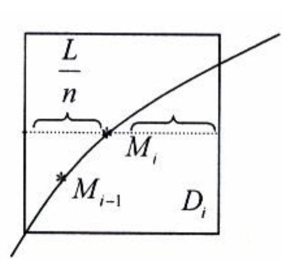


Fig. 9

$\text{aria}\left(\bigcup_{i=0}^{n} D_i\right) \le \sum_{i=0}^{n} \text{aria}(D_i) = (n+1)\dfrac{4L^2}{n^2}$. Cum $\lim_{n\to\infty}(n+1)\dfrac{4L^2}{n^2} = 0$, pentru n suficient de mare, aria mulțimii $\bigcup_{i=0}^{n} D_i$ este oricât de mică, deci suportul curbei γ este o mulțime de arie zero.

Din Teoremele 5'.1.1 şi 5.1.2 rezultă:

Corolarul 5.1.4. *Orice mulțime plană mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de curbe rectificabilă are arie.*

Corolarul 5.1.5. *Orice mulțime mărginită a cărei frontieră este netedă pe porțiuni are arie.*

Afirmația rezultă din Teorema 4.2.1 şi Corolarul 5.1.4.

Propoziția 5.1.2. *Dacă A_1 şi A_2 sunt două mulțimi care au arie şi nu au puncte interioare comune, atunci reuniunea lor $A = A_1 \cup A_2$ are arie şi*

$\text{aria}(A) = \text{aria}(A_1) + \text{aria}(A_2)$.

Demonstrație. Deoarece frontiera lui A este inclusă în reuniunea frontierelor lui A_1 şi A_2 şi acestea sunt de arie zero, rezultă că şi fr$A$ este de arie zero, deci A are arie.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există mulțimile elementare E_i, F_i, $i = 1,2$ cu proprietățile: $E_1 \subset A_1 \subset F_1$, $E_2 \subset A_2 \subset F_2$, $\text{aria}(F_1) - \text{aria}(E_1) < \varepsilon$, $\text{aria}(F_2) - \text{aria}(E_2) < \varepsilon$.

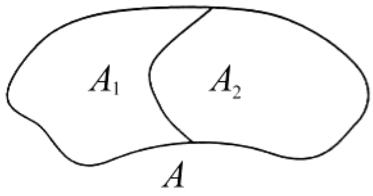


Fig. 10

Avem

$\text{aria}\, E_1 + \text{aria}\, E_2 \le \text{aria}\, A \le \text{aria}\left(F_1 \cup F_2\right) \le$
$\le \text{aria}\, F_1 + \text{aria}\, F_2$

şi

$\text{aria}\, E_1 + \text{aria}\, E_2 \le \text{aria}\, A_1 + \text{aria}\, A_2 \le$
$\le \text{aria}\, F_1 + \text{aria}\, F_2$

Aceste inegalități implică

$$\left|\text{aria}\, A - \left(\text{aria}\, A_1 + \text{aria}\, A_2\right)\right| \le \text{aria}\, F_1 - \text{aria}\, E_1 + \text{aria}\, F_2 - \text{aria}\, E_2 < 2\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că $\text{aria}\, A = \text{aria}\, A_1 + \text{aria}\, A_2$.

5.2. INTEGRALA DUBLĂ. DEFINIȚIE. PROPRIETĂȚI

Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Atunci există un cerc care conține mulțimea A. Rezultă că distanța dintre orice două puncte ale mulțimii A este mai mică decât diametrul acestui cerc. Aşadar, mulțimea $\{\text{dist}(M,N),\ M \in A,\ N \in A\}$ este o mulțime de numere reale pozitive majorată, deci are margine superioară.

Definiția 5.2.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Se numeşte diametrul mulțimii A următorul număr*:

$$d(A) = \text{diam}(A) = \sup\{\,\text{dist}(M,N);\ M \in A,\ N \in A\,\}$$

Fig. 1

Definiția 5.2.2. *Fie A şi B două mulțimi din plan. Se numeşte distanța dintre aceste mulțimi următorul număr*

$$d(A,B) = \inf\{\,\text{dist}(M,N);\ M \in A,\ N \in B\,\}.$$

Este clar că dacă $A \cap B \ne \varnothing$ atunci $d(A,B) = 0$. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Într-adevăr, distanța dintre graficul funcției $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \ne 0$ şi axa Ox este zero, deşi cele două mulțimi sunt disjuncte.

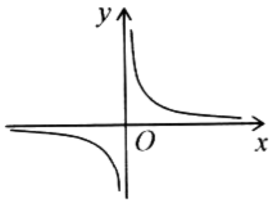


Fig. 2

Teorema 5.2.1. *Fie A şi B două mulţimi plane închise, mărginite şi disjuncte. Atunci* $d\left(A,B\right)>0$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $d\left(A,B\right)=0$. Atunci, pentru $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, există $P_n\in A$ şi $Q_n\in B$ astfel încât

$$\operatorname{dist}\left(P_n,Q_n\right)<\frac{1}{n} \tag{1}$$

Deoarece mulţimea A este mărginită, rezultă că şi şirul $\left\{P_n\right\}$ este mărginit. Din Lema Cesàro deducem că există un subşir $\left\{P_{n_k}\right\}$ convergent. Fie $P=\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}$. Cum A este închisă rezultă că $P\in A$. Pe de altă parte, din (1) rezultă că subşirul $\left\{Q_{n_k}\right\}$ este de asemenea convergent şi limita sa este tot P. Evident, $P\in B$, pentru că B este închisă. Am ajuns astfel la o contradicţie şi anume $P\in A\bigcap B$, adică A şi B nu sunt disjuncte.

În cele ce urmează vom nota cu D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, adică o mulţime conexă, închisă şi mărginită. Presupunem în plus că D are arie. Aceasta se întâmplă, de exemplu, dacă frontiera lui D este o reuniune finită de curbe rectificabile. În particular dacă este netedă pe porţiuni.

Definiţia 5.2.3. *Se numeşte partiţie a lui D orice familie finită de subdomenii* $D_i\subset D,\ i=\overline{1,p}$ *, care au arie, nu au puncte interioare comune şi* $D=\bigcup\limits_{i=1}^{\rho}D_i$.

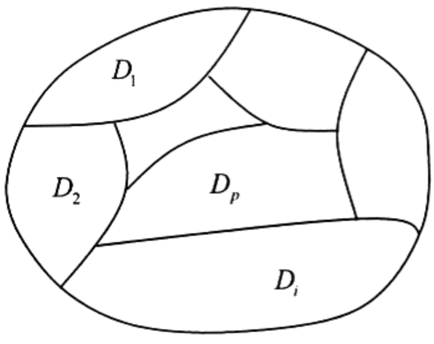


Fig. 3

Dacă notăm cu ρ partiţia $D_1,D_2,\ldots,D_p$ a lui D atunci norma acestei partiţii se defineşte astfel: $\left\|\rho\right\|=\max\left\{\operatorname{diam}\left(D_i\right);\ 1\le i\le p\right\}$.

Din Propoziţia 5.1.2 rezultă că $\operatorname{aria}D=\sum\limits_{i=1}^{p}\operatorname{aria}D_i$.

Definiţia 5.2.4. *Spunem că partiţia* ρ' *a domeniului D este mai fină ca partiţia* ρ *a acestui domeniu şi notăm aceasta cu* $\rho'\succ\rho$ *, dacă fiecare subdomeniu al partiţiei* ρ *este o reuniune finită de subdomenii ale partiţiei* ρ' *. Aşadar, dacă* ρ *este partiţia* $\left(D_i\right)_{1\le i\le p}$ *, atunci*

ρ' *este de forma* $\left\{D'_{ij}\right\}_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n_i}}$ *şi* $D_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} D'_{ij}$, $\forall\ i=\overline{1,p}$.

Este evident că dacă $\rho \prec \rho'$ atunci $\|\rho\| \ge \|\rho'\|$. Fie $\rho: D_1, D_2, \dots, D_p$ o partiţie a domeniului D şi fie $f: D \to$ P o funcţie mărginită. Notăm cu:

$$m = \inf\left\{ f(x,y) \,\middle|\, (x,y)\in D \right\},\quad M = \sup\left\{ f(x,y) \,\middle|\, (x,y)\in D \right\}$$

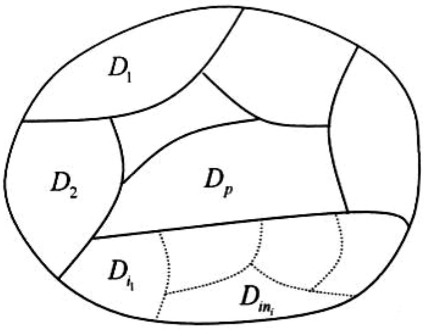


Fig. 4

$$m_i = \inf\left\{ f(x,y) \,\middle|\, (x,y)\in D_i \right\},$$

$$M_i = \sup\left\{ f(x,y) \,\middle|\, (x,y)\in D_i \right\}.$$

Sumele Darboux corespunzătoare funcţiei f şi partiţiei ρ se definesc astfel:

$$s_\rho = \sum_{i=1}^{p} m_i \,\text{aria}\, D_i \quad \text{şi} \quad S_\rho = \sum_{i=1}^{p} M_i \,\text{aria}\, D_i .$$

Deoarece $m \le m_i \le M_i \le M$, $\forall\ i$ şi, aria $D = \sum\limits_{i=1}^{p}$ aria D_i , rezultă:

$$m(\text{aria}\, D) \le s_\rho \le S_\rho \le M(\text{aria}\, D) \tag{2}$$

Lema 5.2.1. *Dacă* $\rho \prec \rho'$ *atunci* $s_\rho \le s_{\rho'} \le S_{\rho'} \le S_\rho$.

Demonstraţie

Presupunem că partiţia ρ se compune din domeniile $(D_i)_{1\le i\le p}$ şi partiţia ρ' din domeniile $\left\{D'_{ij}\right\}_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n_i}}$. Cum $\rho \prec \rho'$ rezultă că pentru orice $i=\overline{1,p}$ avem $D_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} D'_{ij}$. Dacă notăm cu $m'_{ij} = \inf\left\{ f(x,y) \,\middle|\, (x,y)\in D'_{ij} \right\}$, atunci $m'_{ij} \ge m_i$, $\forall\ i=\overline{1,p}$, $\forall\ j=\overline{1,n_i}$. În continuare avem

$$s_\rho = \sum_{i=1}^{p} m_i \,\text{aria}\, D_i = \sum_{i=1}^{p} m_i \left(\sum_{j=1}^{n_i} \text{aria}\, D'_{ij} \right) \le \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} m'_{ij} \,\text{aria}\, D'_{ij} = s_{\rho'} .$$

Aşadar, am arătat că $s_\rho \le s_{\rho'}$. În mod asemănător se arată că $S_{\rho'} \le S_\rho$.

Lema 5.2.2. *Pentru orice două partiţii* ρ' *şi* ρ'' *ale domeniului D avem:* $s_{\rho'} \le S_{\rho''}$.

Demonstraţie

Să presupunem că partiția ρ' se compune din subdomeniile $\left(D_i'\right)_{1\le i\le p}$ iar partiția ρ'' din subdomeniile $\left(D_j''\right)_{1\le j\le q}$. Dacă notăm cu ρ partiția formată din domeniile $\left(D_i'\cap D_j''\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$, atunci ρ este mai fină şi ca ρ' şi ca ρ''. Din Lema 5.1.2 rezultă: $s_{\rho'}\le s_\rho\le S_\rho\le S_{\rho''}$.

În continuare vom nota cu

$I_*=\sup\left\{ s_\rho \mid \rho-\text{partiție a lui } D\right\}$ şi $I^*=\inf\left\{ S_\rho \mid \rho-\text{partiție a lui } D\right\}$.

Existența acestor margini rezultă din inegalitățile (2). Din Lema 5.2.2 rezultă că $I_*\le I^*$.

Definiția 5.2.5. *Spunem că funcția f este integrabilă pe domeniul D dacă* $I_*=I^*=I$. *Valoarea comună I se notează cu* $I=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ *şi se numeşte integrala dublă a funcției f pe domeniul D.*

Lema 5.2.3. *Pentru orice* $\varepsilon>0$ *există* $\delta_\varepsilon>0$ *astfel încât pentru orice partiție* ρ *a domeniului D cu* $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$ *avem:* $I_*-\varepsilon<s_\rho\le S_\rho<I^*+\varepsilon$.

Demonstrație. Din definiția marginii superioare rezultă că $\forall\ \varepsilon>0$ există o partiție ρ_0 a domeniului *D* astfel încât

$$I_*-\frac{\varepsilon}{2}<s_{\rho_0} \tag{3}$$

Vom nota cu $\left(G_\kappa\right)_{1\le\kappa\le r}$ elementele partiției ρ_0, cu Γ_κ frontiera mulțimii G_κ şi cu $\Gamma=\bigcup\limits_{\kappa=1}^{r}\Gamma_\kappa$. Deoarece G_κ are arie, rezultă că Γ_κ este de arie zero. Cum Γ este o reuniune finită de mulțimi mărginite închise, de arie zero, rezultă că Γ este o mulțime închisă, mărginită de arie zero.

Pentru orice $\varepsilon>0$ există o mulțime elementară *E* cu proprietățile $\Gamma\subset E$ şi $\text{aria}\,E<\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$, unde *M* şi *m* sunt marginile funcției *f* pe *D*. Dacă notăm cu *C* frontiera mulțimii elementare *E*, atunci *C* este o mulțime închisă mărginită şi putem presupune că $\Gamma\cap C=\varnothing$. Din Teorema 5.2.1 rezultă că $\text{dist}(C,\Gamma)=\delta_\varepsilon>0$. Fie $\rho:\left(D_i\right)_{1\le i\le p}$ o partiție a domeniului *D* cu $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$. Să observăm că elementele partiției ρ sunt de două feluri şi anume: Dacă $D_i\cap\Gamma\ne\varnothing$ atunci $D_i\subset E$; dacă $D_i\cap\Gamma=\varnothing$ atunci există o singură mulțime G_κ astfel încât $D_i\subset G_\kappa$. Dacă

$I=\{1,2,\dots,p\}$, atunci notăm cu $I_1=\left\{i\in I \,\middle|\, D_i\cap\Gamma\neq\emptyset\right\}$ şi cu $I_2=I\setminus I_1$. Aşadar, dacă $i\in I_1$ avem $D_i\subset E$ şi dacă $i\in I_2$ există un κ (unic) astfel încât $D_i\subset G_\kappa$. Fie $\tilde{\rho}$ partiţia formată din mulţimile $(D_i\cap G_\kappa)_{i,\kappa}$.

Din cele de mai sus rezultă că elementele lui $\tilde{\rho}$ sunt de forma $(D_i\cap G_\kappa)_{\substack{i\in I_1\\ \kappa=\overline{1,r}}}$ şi $\{D_j\}_{j\in I_2}$.

În continuare avem $s_{\tilde{\rho}}-s_\rho=\sum_{i\in I_1}\sum_{\kappa=1}^{r}\tilde{m}_{i\kappa}\,\text{aria}(D_i\cap G_\kappa)-\sum_{i\in I_1}m_i\,\text{aria}(D_i)\leq$
$\leq\sum_{i\in I_1}M\,\text{aria}\,D_i-\sum_{i\in I_1}m\,\text{aria}\,D_i\leq(M-m)\,\text{aria}\,E<(M-m)\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Aşadar

$$s_{\tilde{\rho}}<s_\rho+\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Pe de altă parte, din Lema 5.2.1 rezultă că $s_{\rho_0}\leq s_{\tilde{\rho}}$, deoarece $\rho_0\prec\tilde{\rho}$. Ţinând seama acum de (3) şi (4) obţinem:

$$I_*-\frac{\varepsilon}{2}<s_{\rho_0}\leq s_{\tilde{\rho}}<s_\rho+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{ deci }\ I_*-\varepsilon<s_\rho.$$

Cealaltă inegalitate din enunţ se demonstrează asemănător.

Teorema 5.2.2 (Darboux) *Fie D un domeniu compact care are arie şi* $f:D\to\mathbb{R}$ *o funcţie mărginită. Condiţia necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă pe D este ca pentru orice* $\varepsilon>0$ *să existe* $\delta_\varepsilon>0$ *cu proprietatea că pentru orice partiţie ρ a lui D cu* $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$ *să avem* $S_\rho-s_\rho<\varepsilon$.

Demonstraţie.

Necesitate. Prin ipoteză $I_*=I^*=I$. Din Lema 5.2.3 rezultă că $\forall\ \varepsilon>0$, există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ \rho$ partiţie a lui D cu $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$ avem

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<s_\rho\leq S_\rho<I+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{ deci }\ .\ S_\rho-s_\rho<\varepsilon.$$

Suficienţă. Prin ipoteză $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât $S_\rho-s_\rho<\varepsilon$ pentru orice partiţie ρ cu $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$. Din inegalităţile $s_\rho\leq I_*\leq I^*\leq S_\rho$ deducem $0\leq I^*-I_*<\varepsilon$. Cum $\varepsilon>0$ este arbitrar rezultă $I^*-I_*=0$, deci f este integrabilă pe D.

Teorema 5.2.3. *Orice funcţie continuă pe D este integrabilă pe D.*

Demonstrație. Fie $f: D \to$ P continuă şi fie $\rho: D_1, \ldots, D_p$ o partiție oarecare a lui D. Atunci avem:

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i) \text{aria } D_i .$$

Din continuitatea lui f rezultă pe de o parte că f este mărginită şi îşi atinge marginile pe fiecare domeniu compact D_i, iar pe de altă parte că f este uniform continuă pe D. Fie $(\xi_i', \eta_i') \in D_i$ astfel încât $m_i = f(\xi_i', \eta_i')$ şi fie $(\xi_i'', \eta_i'') \in D_i$ astfel încât $M_i = f(\xi_i'', \eta_i'')$.

Din continuitatea uniformă rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x', y') \in D$, $(x'', y'') \in D$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, $|y' - y''| < \delta_\varepsilon$ avem

$$\left| f(x', y') - f(x'', y'') \right| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} .$$

Dacă presupunem acum că $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ va rezulta

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^{p} \left(f(\xi_i'', \eta_i'') - f(\xi_i', \eta_i') \right) \text{aria } D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \sum_{i=1}^{n} \text{aria}(D_i) = \varepsilon .$$

Din Teorema 5.2.2 rezultă că f este integrabilă pe D.

Teorema 5.2.4. *Dacă f este mărginită pe D şi continuă pe D cu excepția eventual a unei mulțimi de arie zero, atunci f este integrabilă pe D.*

Demonstrație.

Fie $M > 0$ astfel încât $|f(x, y)| < M$, $\forall\ (x, y) \in D$ şi fie $\varepsilon > 0$ oarecare.

Prin ipoteză există o mulțime elementară E care conține în interiorul său punctele de discontinuitate ale lui f şi aria $E < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

Dacă notăm cu $\tilde{D} = D \setminus \overset{\circ}{E}$, atunci $\tilde{D}$ este o mulțime închisă şi evident mărginită. Cum f este continuă pe $\tilde{D}$ rezultă că f este uniform continuă pe $\tilde{D}$, deci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi $(x', y') \in \tilde{D}$, $(x'', y'') \in \tilde{D}$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, $|y' - y''| < \delta_\varepsilon$ avem $\left| f(x', y') - f(x'', y'') \right| < \dfrac{\varepsilon}{2 \text{aria}(D)}$. Fie acum ρ o partiție a lui D al cărui prim element este $D_1 = E \cap D$ iar celelalte elemente $D_2, \ldots, D_j$ au diametrele mai mici ca δ_ε. Dacă calculăm diferența $S_\rho - s_\rho$ obținem:

$$S_\rho - s_\rho \le (M_1 - m_1) \text{aria } E + \sum_{i=2}^{n} (M_i - m_i) \text{aria } D_i <$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2\,\text{aria}\,D} \cdot \sum_{i=2}^{n} \text{aria}\,D_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Cum $0 \le I^* - I_* \le S_\rho - s_\rho < \varepsilon$ şi $\varepsilon > 0$ este arbitrar rezultă că $I^* = I_*$, deci f este integrabilă pe D.

În continuare vom introduce noţiunea de sumă Riemann. Fie $\rho : D_1, \dots, D_p$ o partiţie a domeniului D şi fie $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ un punct arbitrar, $\forall\ i = \overline{1, p}$. Notăm cu $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_i)_{1 \le p \le 1}$. Suma Riemann ataşată funcţiei f, diviziunii ρ şi punctelor intermediare (ξ_i, η_i) se defineşte astfel: $\sigma_\rho(f, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i)\,\text{aria}\,D_i$. Cum $m_i \le f(\xi_i, \eta_i) \le M_i$, $\forall\ i = \overline{1, p}$, rezultă $s_\rho \le \sigma_\rho(f, \xi, \eta) \le S_\rho$, $\forall\ (\xi, \eta)$.

Definiţia 5.1.6. *Fie D un domeniu compact şi fie f : D → P o funcţie mărginită. Spunem că f este integrabilă pe D (în sensul lui Riemann, pe scurt (R)-integrabilă) dacă există un număr finit I cu proprietatea că* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât oricare ar fi* ρ *partiţie a lui D cu* $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ *şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare* $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ *avem*

$$\left| \sigma_\rho(f, \xi, \eta) - I \right| < \varepsilon .$$

Numărul I se numeşte integrala dublă a funcţiei f pe domeniul D şi se foloseşte notaţia $I = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Observaţia 5.2.1. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $(\alpha_i, \beta_i) \in D$ şi $(\gamma_i, \delta_i) \in D$ astfel încât $S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) < \varepsilon$ şi $\sigma_\rho(f, \gamma, \delta) - s_\rho < \varepsilon$.

Într-adevăr, din definiţia marginii superioare rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, există $(\alpha_i, \beta_i) \in D_i$ astfel încât $M_i - f(\alpha_i, \beta_i) < \frac{\varepsilon}{\text{aria}\,D}$.

În continuare avem:

$$S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{p} \left(M_i - f(\alpha_i, \beta_i) \right) \text{aria}\,D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria}\,D} \cdot \text{aria}\,D = \varepsilon .$$

Cealaltă inegalitate se demonstrează în mod analog.

Folosind această observaţie şi procedând ca în demonstraţia Teoremei 2.3.2 se arată că cele două definiţii ale integralei duble cu sume Riemann şi sume Darboux coincid.

De asemenea, se poate demonstra, ca şi în cazul integralei simple, că are loc următorul criteriu de integrabilitate.

Teorema 5.2.5 (Riemann). *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *mărginită. Condiția necesară și suficientă ca f să fie integrabilă pe D, este să existe un număr real finit I cu proprietatea că pentru orice șir* $\{\rho_n\}$ *de partiție ale lui D, care satisface condiția* $\lim\limits_{n\to\infty}\|\rho_n\| = 0$ *și orice șir* $\left(\xi^{(n)},\eta^{(n)}\right)$ *de puncte intermediare să avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\rho_n}\left(f,\xi^{(n)},\eta^{(n)}\right) = I$.

Observația 5.2.2. Din Teorema 5.2.5 și Observația 5.2.1 rezultă că dacă f este integrabilă pe D, atunci pentru orice șir $\{\rho_n\}$ de partiții ale lui D, care satisface condiția $\lim\limits_{n\to\infty}\|\rho_n\| = 0$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} s_{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy .$$

Fie $\{\rho_n\}$ un șir de partiții ale domeniului D cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty}\|\rho_n\| = 0$. Subdomeniile partiției ρ_n care nu au puncte comune cu frontiera lui D, le numim celule interioare. Reuniunea lor o notăm cu P_n. Celelalte subdomenii ale partiției ρ_n le numim celule frontieră și reuniunea lor o notăm cu Q_n. Evident $D = P_n \cup Q_n$ și $\text{aria}\, D = \text{aria}\, P_n + \text{aria}\, Q_n$.

Observația 5.2.3. $\text{aria}\, D = \lim\limits_{n\to\infty} \text{aria}\, P_n$.

Într-adevăr, deoarece $\text{aria}\, D = \sup\left\{\text{aria}\, E;\ E \subset D,\ E \in \mathcal{E}\right\}$, rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ o mulțime elementară $E_\varepsilon \subset D$ astfel încât

$$\text{aria}\, D < \text{aria}\, E_\varepsilon + \varepsilon \tag{5}$$

Mulțimea E_ε este formată dintr-un număr finit de dreptunghiuri închise, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că mulțimea E_ε este disjunctă de frontiera domeniului D, deoarece, în caz contrar, putem micșora (comprima) această mulțime pe direcția axelor de coordonate, astfel încât mulțimea obținută să fie disjunctă de frontiera lui D și să satisfacă în continuare (5). Fie R un dreptunghi oarecare al mulțimii E_ε. Conform Teoremei 5.2.1 distanța de la R la frontiera lui D este strict pozitivă. Notăm cu δ cea mai mică distanță de la frontiera lui D la dreptunghiurile mulțimii E_ε și considerăm o partiție ρ_{n_0} cu $\|\rho_{n_0}\| < \delta$.

Observăm că $E_\varepsilon \subset P_{n_0}$, unde P_{n_0} este reuniunea tuturor celulelor interioare ale partiției ρ_{n_0}. Într-adevăr, dacă $M \in E_\varepsilon$, atunci există un dreptunghi $R \subset E_\varepsilon$ astfel încât $M \in R$. Deoarece distanța de la M la frontiera lui D este mai mare ca δ,

punctul M nu poate aparține nici unei celule frontieră din partiția ρ_{n_0}, deci aparține unei celule interioare a partiției ρ_{n_0}, adică a mulțimii P_{n_0}. Rezultă că aria $D <$ aria $P_{n_0} + \varepsilon$, deci

$$\text{aria}\, D = \sup\left\{ \text{aria}\, P_n;\ n \in \mathbb{N}^* \right\} = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\, P_n .$$

În continuare vom evidenția o consecință importantă a Observației 5.2.3 pentru teoria integralei duble. Fie $\{\rho_n\}$ un şir de partiții ale domeniului D de normă tinzând la 0. Celulele interioare ale partiției ρ_n le notăm cu D'_{ni}, iar celulele frontieră ale lui ρ_n le notăm cu D''_{nj}. Avem $D = P_n \cup Q_n$ unde $P_n = \bigcup_i D'_{ni}$ şi $Q_n = \bigcup_j D''_{nj}$.

Din Observația 5.2.3 deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria}\left(Q_n\right) = 0 \tag{6}$$

Observația 5.2.4. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită, integrabilă pe D şi fie M'_{ni} (respectiv M''_{nj}) un punct arbitrar din domeniul D'_{ni} (respectiv D''_{nj}). Atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i f\left(M'_{ni}\right) \text{aria}\left(D'_{ni}\right) = \iint_D f\left(x, y\right) dx\, dy .$$

Într-adevăr, deoarece f este mărginită pe D, rezultă că există $K > 0$ astfel încât $\left|f\left(M\right)\right| < K$, $\forall\ M \in D$. În continuare avem:

$$\left| \sum_j f\left(M''_{nj}\right) \text{aria}\left(D''_{nj}\right) \right| \le \sum_j \left| f\left(M''_{nj}\right) \right| \text{aria}\left(D''_{nj}\right) \le K\, \text{aria}\left(Q_n\right) .$$

Ținând seama de Teorema 5.2.5 şi de (6) deducem

$$\iint_D f\left(x, y\right) dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_i f\left(M'_{ni}\right) \text{aria}\left(D'_{ni}\right) + \sum_j f\left(M''_{nj}\right) \text{aria}\left(D''_{nj}\right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_i f\left(M'_{ni}\right) \text{aria}\left(D'_{ni}\right).$$

5.3. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI DUBLE

Proprietățile integralei duble sunt analoage cu proprietățile integralei simple. Lăsăm demonstrațiile în seama cititorului.

5.3.1. $\iint_D 1.dx\, dy = \text{aria}\, D$.

5.3.2. Dacă f şi g sunt integrabile pe D, atunci $\forall\ \alpha,\ \beta \in$ P, funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe D şi

$$\iint\limits_D \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right] dx\,dy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy\,.$$

5.3.3. Dacă f şi g sunt integrabile pe D şi $f(x,y) \le g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$, atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy\,.$$

5.3.4. Dacă f este integrabilă pe D, atunci $|f|$ este integrabilă pe D şi

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dx\,dy\,.$$

5.3.5. Dacă f este integrabilă pe D şi notăm cu m (respectiv M) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcţiei f pe D, atunci există $m \le \mu \le M$ astfel încât

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \mu\,\text{aria}\,D\,.$$

Dacă presupunem în plus că f este continuă pe D, atunci există un punct $(\xi,\eta) \in D$ astfel încât

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\,\text{aria}\,D\,.$$

5.3.6. Dacă domeniul D este reuniunea a două domenii compacte D_1 şi D_2 care au arie, fără puncte interioare comune şi f este integrabilă pe D_1 şi D_2, atunci f este integrabilă pe D şi

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

5.4. MODUL DE CALCUL AL INTEGRALEI DUBLE

Definiţia 5.4.1. *Un domeniu compact D se numeşte* ***simplu în raport cu axa Oy****, dacă există două funcţii continue* $\varphi,\psi:[a,b]\to$ P *astfel încât* $\varphi(x) < \psi(x)$ *pentru orice* $a < x < b$ *şi*

$$D = \left\{(x,y) \in \square^2 \,\middle|\, a \le x \le b;\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}.$$

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 1.

În mod analog, un domeniu D se numeşte simplu în raport cu axa Ox dacă există două funcţii continue $u,v:[c,d]\to$ P astfel încât $u(x) < v(x)$ pentru $c < y < d$ astfel încât

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, c\le y\le d;\ u(x)\le x\le v(x)\right\}.$$

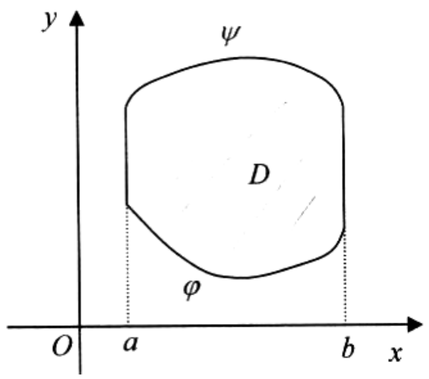


Fig. 1

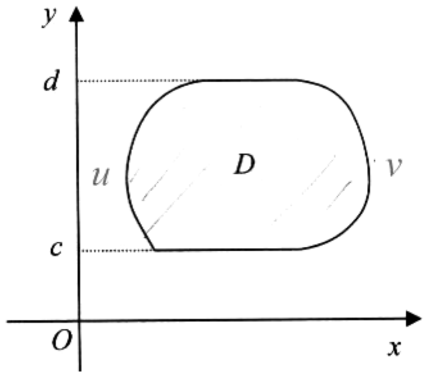


Fig. 2

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 2.

Există domenii compacte care sunt simple în raport cu ambele axe, de exemplu dreptunghiurile, cercurile etc.

Lema 5.4.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie* $f: D\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe D.*

Dacă notăm cu *m* (respectiv *M*) marginile funcţiei *f* pe domeniul *D* atunci

$$m(\text{aria}\,D)\le\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx\le M(\text{aria}\,D).$$

Demonstraţie.

Pentru început, să observăm că din teorema de continuitate a integralei cu parametru (Teorema 3.2.1) rezultă că funcţia $F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$, $x\in[a,b]$, este continuă pe $[a,b]$, deci integrabilă pe $[a,b]$. Prin ipoteză avem:

$$m\le f(x,y)\le M\ ,\ \forall\ (x,y)\in D.$$

Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}m\,dy\le\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\le\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}M\,dy\ ,\ \forall\ x\in[a,b],$$

sau $$m[\psi(x)-\varphi(x)]\le\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\le M[\psi(x)-\varphi(x)],\ \forall\ x\in[a,b].$$

Folosind din nou proprietatea de monotonie a integralei obţinem:

$$m\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]dx\le\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx\le M\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]dx.$$

Rămâne să observăm că $\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))dx=\text{aria}\,D$ (Corolarul 5.1.1) şi cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema 5.4.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi* $f : D \to$ P *o funcţie continuă. Atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Demonstraţie. Fie $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, o diviziune echidistantă a intervalului $[a,b]$.

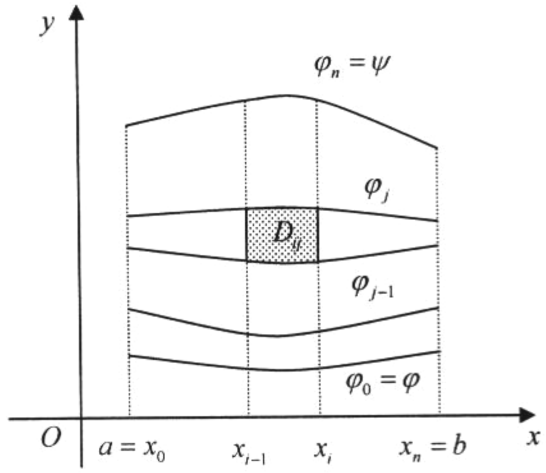


Fig. 3

Aşadar, $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$ şi $\|\Delta_n\| = \dfrac{b-a}{n}$.

Considerăm funcţiile $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$ definite astfel:

$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \dfrac{j}{n}\left[\psi(x) - \varphi(x)\right]$, $\forall\ x \in [a,b]$. Evident $\varphi_0 = \varphi$ şi $\varphi_n = \psi$.

Notăm cu ρ_n partiţia domeniului *D* formată din mulţimile $\left(D_{ij}\right)_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}}$, unde

$$D_{ij} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \le x \le x_i ,\ \varphi_{j-1}(x) \le y \le \varphi_j(x) \right\}.$$

Observăm că $\operatorname{diam}\left(D_{ij}\right) \le \dfrac{b-a}{n} + \dfrac{1}{n}\|\psi - \varphi\|_\infty$, $\forall\ x \in [x_{i-1}, x_i]$, de unde deducem că $\|\rho_n\| \to 0$ când $n \to \infty$.

Fie m_{ij} (respectiv M_{ij}) marginea inferioară (respectiv superioară)a funcţiei *f* pe domeniul D_{ij}. Din Lema 5.4.1 rezultă

$$m_{ij} \operatorname{aria} D_{ij} \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le M_{ij} \operatorname{aria} D_{ij}, \quad i,j = \overline{0,n} .$$

Sumând succesiv după *i* şi *j* obţinem:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \operatorname{aria} D_{ij} \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \operatorname{aria} D_{ij} .$$

Deoarece $\sum_{j=1}^{n}\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ şi

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

rezultă:

$$s_{\rho_n} \le \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx \le S_{\rho_n} \tag{1}$$

Cum f este integrabilă pe D, din Observația 5.2.2 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} s_{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Trecând la limită după n în inegalitățile (1) obținem

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx\,.$$

Observația 5.4.1. *Dacă domeniul D este simplu în raport cu axa Ox, avem următoarea formulă de calcul*

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx\right)dy\,.$$

Exemplul 5.4.1. Să se calculeze $\iint_D x^2y\,dx\,dy$ unde D este domeniul mărginit de curbele $y = x^2$, $y = 1$. Observăm că domeniul D este simplu în raport cu axa Oy: $D = \left\{(x,y)\middle| -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\right\}$.

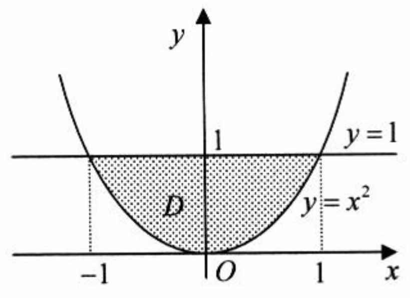


Fig. 4

Conform Teoremei 5.1.1. avem:

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} x^2y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{1}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - x^6\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}\,.$$

Pe de altă parte, este uşor de observat că domeniul d este simplu şi în raport cu axa Ox. Într-adevăr $D = \left\{(x,y)\middle|\, 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\right\}$. Aşadar avem

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(y \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right) dy =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3} \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

5.5. SCHIMBAREA VARIABILELOR ÎN INTEGRALA DUBLĂ

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit care are arie, fie funcţia vectorială $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, definită prin $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ şi fie $D \subset \mathbb{R}^2$ imaginea directă a domeniului Ω prin funcţia vectorială *F*. Presupunem că funcţia *F* are următoarele proprietăţi:

(i) *F* este de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$.

(ii) $F : \Omega \to D$ este bijectivă.

(iii) Transformarea *F* este o transformare regulată pe Ω, adică iacobianul său

$$\det J_F(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0,\ \forall\ (u,v) \in \Omega.$$

În aceste condiţii rezultă că $\overline{D} = F(\overline{\Omega})$ este la rândul său un domeniu compact şi că iacobianul transformării *F* păstrează semn constant pe Ω. O astfel de funcţie vectorială se mai numeşte şi schimbare de coordonate sau schimbare de variabile.

Observaţia 5.5.1. O schimbare de variabile transformă o curbă netedă pe porţiuni din domeniul Ω, într-o curbă netedă pe porţiuni din domeniul *D*. Fie $\gamma \subset \Omega$ o curbă netedă şi fie $\rho(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a,b]$ o reprezentare parametrică a sa. Dacă notăm cu $C = F(\gamma)$, atunci $r(t) = (x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)))$, $t \in [a,b]$ este o reprezentare parametrică a curbei *C* ⊂ *D*. Ţinând seama de formulele de calcul pentru derivatele parţiale ale funcţiilor compuse obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial x}{\partial u}[u(t),v(t)] \cdot u'(t) + \dfrac{\partial x}{\partial v}[u(t),v(t)] \cdot v'(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial y}{\partial u}[u(t),v(t)] \cdot u'(t) + \dfrac{\partial y}{\partial v}[u(t),v(t)] \cdot v'(t) \end{cases}$$

Dacă presupunem, prin absurd că *C* nu este netedă, rezultă că există $t_0 \in (a,b)$ astfel încât $\frac{dx}{dt}[u(t_0), v(t_0)] = 0$ şi $\frac{dy}{dt}[u(t_0), v(t_0)] = 0$, deci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}\left[u(t_0),v(t_0)\right]\cdot u'(t_0)+\dfrac{\partial x}{\partial v}\left[u(t_0),v(t_0)\right]\cdot v'(t_0)=0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\left[u(t_0),v(t_0)\right]\cdot u'(t_0)+\dfrac{\partial y}{\partial v}\left[u(t_0),v(t_0)\right]\cdot v'(t_0)=0 \end{cases} \tag{1}$$

Cum prin ipoteză $\left(u'(t_0)\right)^2+\left(v'(t_0)\right)^2>0$, rezultă că sistemul (1) admite soluție nebanală. Aşadar, avem:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\left[u(t_0),v(t_0)\right]=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\left[u(t_0),v(t_0)\right] & \dfrac{\partial x}{\partial v}\left[u(t_0),v(t_0)\right] \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\left[u(t_0),v(t_0)\right] & \dfrac{\partial y}{\partial v}\left[u(t_0),v(t_0)\right] \end{vmatrix}=0,$$

ceea ce contrazice faptul că F este o transformare regulată.

Observația 5.5.2. Printr-o schimbare de variabile, orice punct de pe frontiera domeniului D, corespunde unui punct de pe frontiera domeniului Ω şi reciproc. Cu alte cuvinte $F(\operatorname{fr}\Omega)=\operatorname{fr}D$.

Într-adevăr, să presupunem că $(x_0,y_0)\in\operatorname{fr}D$ şi că există $(u_0,v_0)\in\Omega$ astfel încât $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. Cum transformarea F este regulată în punctul (u_0,v_0), din teorema de inversiune locală rezultă că (x_0,y_0) este un punct interior domeniului D, ceea ce este absurd.

În cele ce urmează prezentăm noțiunea de modul de continuitate al unei funcții şi principalele sale proprietăți, care vor interveni în demonstrația teoremei schimbării de variabile.

Definiția 5.5.1. *Fie* $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, *unde* A *este o mulțime oarecare şi fie* $\delta>0$ *oarecare. Vom nota cu*

$$\omega(\delta,f)=\sup\left\{\left|f(M')-f(M'')\right|;\ M',M''\in A,\ \operatorname{dist}(M',M'')<\delta\right\}.$$

Se observă imediat că dacă $0<\delta_1<\delta_2$ atunci $\omega(\delta_1,f)<\omega(\delta_2,f)$.

Observația 5.5.3. O funcție $f:A\to\mathbb{R}$ este uniform continuă pe A, dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \delta>0}}\omega(\delta,f)=0$.

Într-adevăr, prin ipoteză, pentru $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \eta_\varepsilon>0$ cu proprietatea că pentru orice $M',M''\in A$ cu $\operatorname{dist}(M',M'')<\eta_\varepsilon$ avem $\left|f(M')-f(M'')\right|<\varepsilon$. Rezultă că dacă $0<\delta<\eta_\varepsilon$, atunci $\omega(\delta,f)<\varepsilon$, deci $\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \delta>0}}\omega(\delta,f)=0$. Demonstrația afirmației reciproce este asemănătoare.

Observația 5.5.4. Dacă A este convexă, atunci pentru orice $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ avem $\omega(\delta_1+\delta_2, f) \le \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$. În particular, rezultă

$\omega(m\delta, f) \le$, $\forall \;\; m \in \mathbb{N}^*$.

Într-adevăr, fie $M', M'' \in A$ cu $\operatorname{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$ și fie $M = \dfrac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2} M' + \dfrac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2} M''$. Evident M aparține segmentului de dreaptă de capete M' și M'', deci $M \in A$, deoarece A este convexă. În continuare avem:

$$M - M' = \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}(M' - M'') \;\text{ și }\; M'' - M = \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}(M'' - M'), \text{ deci}$$

$$\operatorname{dist}(M, M') = \|M - M'\| = \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\|M'' - M'\| < \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}(\delta_1+\delta_2) = \delta_1$$

$$\operatorname{dist}(M, M'') = \|M - M''\| = \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\|M'' - M'\| < \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}(\delta_1+\delta_2) = \delta_2.$$

Așadar, $\exists \; M \in A$ astfel încât $\operatorname{dist}(M, M') < \delta_1$, $\operatorname{dist}(M, M'') < \delta_2$.

Pentru orice $M', M'' \in A$ cu $\operatorname{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$ avem

$$\left|f(M') - f(M'')\right| \le \left|f(M') - f(M)\right| + \left|f(M) - f(M'')\right| < \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f),$$

deci $\quad \omega(\delta_1+\delta_2, f) \le \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$.

Fie $F : \overline{\Omega} \to \overline{D}$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ o schimbare de variabile. Notăm cu

$$\omega(h) = \max\left\{\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial v}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\right\},$$

unde, de exemplu, $\omega\left(h, \dfrac{\partial x}{\partial u}\right)$ este modulul de continuitate al funcției $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ pe mulțimea Ω, calculat în punctul h, deci

$$\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \sup\left\{\left|\frac{\partial x}{\partial u}(M') - \frac{\partial x}{\partial u}(M'')\right|; \; M', M'' \in \Omega, \operatorname{dist}(M', M'') < h\right\}.$$

Deoarece $x, y \in C^1(\overline{\Omega})$, rezultă că $\lim\limits_{h \to 0} \omega(h) = 0$.

Lema 5.5.1. *Fie* $F : \overline{\Omega} \to \overline{D}$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ *o schimbare de variabile, fie* $\Delta = (a, a+h) \times (b, b+h) \subset \Omega$ *și fie* $P = F(\Delta) \subset D$ *imaginea directă a pătratului* Δ *prin transformarea F. Atunci*

$$\operatorname{aria} P = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right| \operatorname{aria} \Delta + \varphi(h) \quad \textit{unde} \quad |\varphi(h)| \le K h^2 \omega(h),$$

K fiind o constantă independentă de h şi de punctul $A(a,b)$.

Demonstrație.

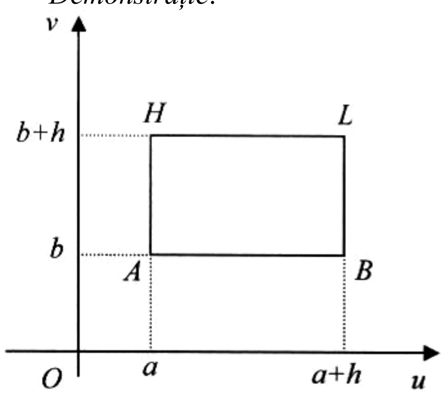


Fig. 1

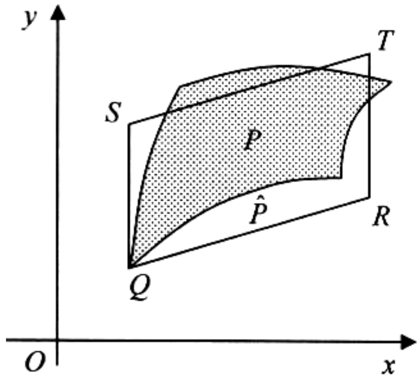


Fig. 2

Fie $c = x(a,b)$ şi $d = y(a,b)$. Din Teorema Lagrange rezultă că există două puncte (ξ,η), (ξ',η') pe segmentul de dreaptă deschis de capete (a,b) şi (u,v) astfel încât:

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \dfrac{\partial x}{\partial u}(\xi,\eta)(u-a) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(\xi,\eta)(v-b) \\ y(u,v) = d + \dfrac{\partial y}{\partial u}(\xi',\eta')(u-a) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(\xi',\eta')(v-b) \end{cases} \tag{2}$$

Dacă notăm cu

$\alpha = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}(\xi,\eta) - \dfrac{\partial x}{\partial u}(a,b)\right)(u-a) + \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}(\xi,\eta) - \dfrac{\partial x}{\partial v}(a,b)\right)(v-b)$ şi

$\beta = \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}(\xi',\eta') - \dfrac{\partial y}{\partial u}(a,b)\right)(u-a) + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}(\xi',\eta') - \dfrac{\partial y}{\partial v}(a,b)\right)(v-b)$, atunci

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \dfrac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) + \alpha \\ y(u,v) = d + \dfrac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) + \beta \end{cases} \tag{3}$$

În continuare considerăm transformarea afină

$$\begin{cases} \hat{x}(u,v) = c + \dfrac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) \\ \hat{y}(u,v) = d + \dfrac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) \end{cases} \tag{4}$$

Fie $\hat{F}:\overline{\Omega}\to\overline{D}$ funcția vectorială $\hat{F}(u,v)=(\hat{x}(u,v),\hat{y}(u,v))$, $(u,v)\in\overline{\Omega}$ şi fie $\hat{P}=\hat{F}(\Delta)$ imaginea directă a pătratului Δ prin transformarea afină $\hat{F}$. Ținând seama de coordonatele vârfurilor *A*, *B*, *H*, *L* ale pătratului Δ rezultă coordonatele vârfurilor patrulaterului $\hat{P}=QRST$, anume

$$Q=\hat{F}(A)=(c,d)$$

$$R=\hat{F}(B)=\left(c+\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)h,\ d+\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)h\right)$$

$$T=\hat{F}(L)=\left(c+\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)h+\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)h,\ d+\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)h+\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)h\right)$$

$$S=\hat{F}(H)=\left(c+\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)h,\ d+\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)h\right)$$

Se observă că dreptele *QR* şi *ST* sunt paralele şi că $\left\|\overrightarrow{QR}\right\|=\left\|\overrightarrow{ST}\right\|=h\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\right)^2}$. Prin urmare, patrulaterul *QRST* este un paralelogram. Aria sa este egală cu mărimea produsului vectorial

$$\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QS}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)h & \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)h & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)h & \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)h & 0\end{vmatrix}=$$

$$=h^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)-\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\right)\vec{k}\ .$$

Aşadar, avem:

$$\text{aria}\,\hat{P}=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right|h^2 \tag{5}$$

Mai reținem că

$$\left\|\overrightarrow{QS}\right\|=\left\|\overrightarrow{RT}\right\|=h\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)\right)^2} \tag{6}$$

Să estimăm acum distanța de la un punct oarecare $M(x,y)\in P$ la punctul corespunzător $\hat{M}(\hat{x},\hat{y})\in\hat{P}$. Din (3) şi (4) rezultă că $\text{dist}(M,\hat{M})=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Pe de altă parte, ținând seama de proprietățile modulului de continuitate, pentru $(u,v)\in\Delta$ obținem

$$|\alpha(u,v)|\le\omega\left(\sqrt{2}h,\frac{\partial x}{\partial u}\right)h+\omega\left(\sqrt{2}h,\frac{\partial x}{\partial v}\right)h\le 2\omega(\sqrt{2}h)h\le 2\omega(2h)h\le 4\omega(h)h$$

Absolut analog se arată că $\left|\beta(u,v)\right| \le 4\omega(h)h$. Aşadar, avem:

$$\operatorname{dist}\left(M,\hat{M}\right) \le \sqrt{32\omega^2(h)h^2} \le 6\omega(h)h = r \tag{7}$$

Notăm cu Γ reuniunea tuturor discurilor de rază r care au centrul în punctul $\hat{M}$, când $\hat{M}$ parcurge frontiera paralelogramului $\hat{P}$. Aria mulţimii Γ este mai mică decât suma ariilor celor patru cercuri de rază r cu centrele în vârfurile paralelogramului $\hat{P}$, plus aria celor patru dreptunghiuri de lăţime $2r$ construite pe laturile paralelogramului $\hat{P}$. Rezultă că

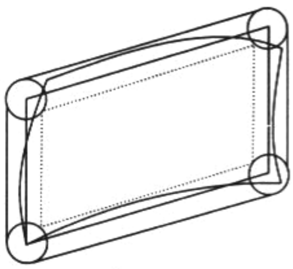


Fig. 3

$$\operatorname{aria}(\Gamma) \le 4\pi r^2 + 4r\left(\left\|\overline{QR}\right\| + \left\|\overline{QS}\right\|\right).$$

Deoarece $x, y \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, rezultă că derivatele lor parţiale de ordinul I sunt mărginite pe $\overline{\Omega}$, deci $\left\|\overline{QR}\right\| < K_1 h$, $\left\|\overline{QR}\right\| < K_1 h$, unde $K_1 > 0$ este o constantă. Prin urmare avem:

$$\operatorname{aria}(\Gamma) \le 4\pi 36\omega^2(h)h^2 + 48\omega(h)h^2K_1 \le K\omega(h)h^2 \tag{8}$$

unde K este o constantă pozitivă independentă de h şi de $A(a,b)$.

Observăm că $P \setminus \hat{P} \subset \Gamma$.

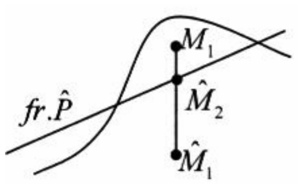


Fig. 4

Într-adevăr, fie $M_1 \in P \setminus \hat{P}$ şi fie $(u_1, v_1) \in \overline{\Delta}$ astfel încât $M_1 = F(u_1, v_1)$. Dacă notăm cu $\hat{M}_1 = \hat{F}(u_1, v_1)$, atunci $\hat{M}_1 \in \hat{P}$ şi $\operatorname{dist}\left(M_1, \hat{M}_1\right) < r$. Cum $M_1 \notin \hat{P}$, rezultă că segmentul de dreaptă $\hat{M}_1 M_1$ întâlneşte frontiera lui $\hat{P}$.

Fie $\hat{M}_2 \in \hat{M}_1 M_1 \cap \operatorname{fr}.\hat{P}$. Avem $\operatorname{dist}\left(M_1\hat{M}_2\right) < \operatorname{dist}\left(M_1\hat{M}_1\right) < r$, deci $M_1 \in \Gamma$. În continuare avem: $P = \hat{P} \bigcup \left(P \setminus \hat{P}\right)$ de unde rezultă că: $\operatorname{aria} P = \operatorname{aria} \hat{P} + \operatorname{aria}\left(P \setminus \hat{P}\right)$.

Cum $\operatorname{aria}\left(P \setminus \hat{P}\right) \le \operatorname{aria}\Gamma$, deducem că există $\theta \in (0,1)$ astfel încât $\operatorname{aria}(P) = \operatorname{aria}\left(\hat{P}\right) + \theta \cdot \operatorname{aria}(\Gamma)$. Din (5) şi (8) obţinem

$$\operatorname{aria}(P) = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right| h^2 + \theta \cdot K\omega(h)h^2.$$

În sfârşit, dacă notăm $\varphi(h) = \theta \cdot K\omega(h)h^2$ atunci $\left|\varphi(h)\right| \le K \cdot \omega(h)h^2$ şi

$$\operatorname{aria}(P) = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right| h^2 + \varphi(h).$$

Cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema 5.5.1. *Fie* $F:\overline{\Omega}\to\overline{D}$, $F(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$, $(u,v)\in\overline{\Omega}$ *o schimbare de variabile şi fie* $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Omega f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right|du\,dv.$$

Demonstraţie. Fie $m\in\mathbb{N}^*$ un număr natural oarecare, fie $h=2^{-m}$ şi fie familiile de drepte $x=kh,\ y=lh,\ k,l\in\mathbb{Z}$.

Notăm cu S_m reţeaua de pătrate determinată de aceste drepte şi cu ρ_m partiţia domeniului Ω determinată de această reţea.

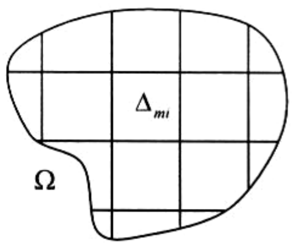


Fig.5

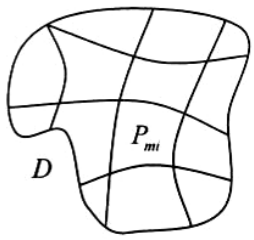


Fig. 6

Fie Δ_{mi} un pătrat interior oarecare al reţelei S_m şi fie $P_{mi}=F(\Delta_{mi})$ imaginea directă a pătratului Δ_{mi} prin transformarea *F*. Din Lema 5.5.1 rezultă că

$$\text{aria}(P_{mi})=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(M_{mi})\right|\text{aria}(\Delta_{mi})+\psi(h)\cdot\text{aria}(\Delta_{mi})\ \text{ unde } |\psi(h)|\le K\omega(h),$$

iar M_{mi} este un punct din pătratul Δ_{mi}. Dacă notăm cu $Q_{mi}=F(M_{mi})\in P_{mi}$ şi ţinem seama că funcţiile *f*, *x* şi *y* sunt continue şi mărginite rezultă

$$\left|\sum_i f(Q_{mi})\text{aria}(P_{mi})-\sum_i f\left[x(M_{mi}),y(M_{mi})\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(M_{mi})\right|\text{aria}(\Delta_{mi})\right|\le$$
$$\le K'\omega(h)\sum_i\text{aria}(\Delta_{mi})=K'\omega(h)\text{aria}(\Omega).$$

Cum funcţiile *f* şi $f\circ F$ sunt continue, deci integrabile şi $\lim\limits_{h\to0}\omega(h)=0$, din Observaţia 5.2.4 deducem că

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{m\to\infty}\sum_i f(Q_{mi})\text{aria}(P_{mi})=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_i f\left[x(M_{mi}),y(M_{mi})\right]\text{aria}(\Delta_{mi})=$$
$$=\iint_\Omega f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right|du\,dv=.$$

Cel mai utilizat tip de schimbare de variabile este trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho > 0, \qquad 0 < \theta < 2\pi \tag{9}$$

Dacă notăm cu $A = \left\{ (\theta,\rho) \middle| 0 < \theta < 2\pi, 0 < \rho < \infty \right\}$, cu $B = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x,0), x \geq 0 \right\}$ şi cu $F(\theta,\rho) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, atunci $F : A \to B$ este o transformare regulată (iacobianul său $J_F(\rho,\theta) = \dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho > 0$).

Fie $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ şi fie $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă . Notăm cu $\Omega = \left\{ (\theta,\rho) \middle| \alpha < \theta < \beta;\, 0 < \rho < \varphi(\theta) \right\}$ şi cu $D = F(\Omega)$, atunci $F : \bar{\Omega} \to \bar{D}$ este o schimbare de variabile. Dacă $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci din Teorema 5.5.1 rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_\Omega f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \\ &= \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho \right) d\theta \end{aligned} \tag{10}$$

Deoarece mulţimea $\bar{D} \setminus D$ (respectiv $\bar{\Omega} \setminus \Omega$) este de arie zero, rezultă că este valabilă şi egalitatea

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\bar{\Omega}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \tag{11}$$

Exemplul 5.5.1. Să se calculeze $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy$, unde

$$D = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 < a^2,\ \frac{x}{\sqrt{3}} < y < x\sqrt{3},\ x > 0 \right\}.$$

În acest caz $\Omega = F^{-1}(D)$ este dreptunghiul $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right) \times (0,a)$. Într-adevăr, înlocuind în inegalităţile care definesc domeniul D pe x şi y cu $\rho\cos\theta$ şi $\rho\sin\theta$ rezultă:

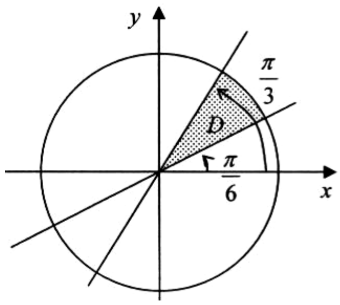


Fig. 7

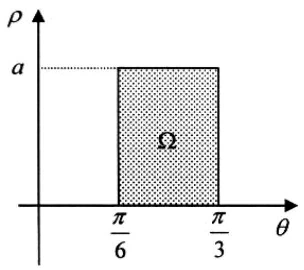


Fig. 8

$$\Omega = \left\{ (\theta,\rho) \middle| \rho^2 < a^2,\ \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} < \sin\theta < \sqrt{3}\cos\theta \right\} =$$

$$=\left\{(\theta,\rho)\,\middle|\,0<\rho<a;\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}<\operatorname{tg}\theta<\sqrt{3}\right\}=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\times(0,a)$$

Aşadar, avem

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\iint_\Omega\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\int_0^a\rho^3 d\rho\right)d\theta=\frac{\pi a^4}{24}.$$

Exemplul 5.5.2. Să se calculeze $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, unde

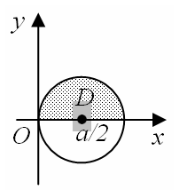


Fig. 9

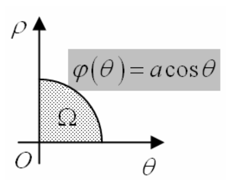


Fig. 10

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2<2ax,\ y>0\right\}$.

Observăm că ecuaţia $x^2+y^2-2ax=0$ este ecuaţia cercului cu centrul în punctul (a, 0) şi de rază r = a. Înlocuind x şi y cu $\rho\cos\theta$ şi $\rho\sin\theta$ în inegalităţile ce definesc D obţinem

$$\Omega=\left\{(\theta,\rho)\,\middle|\,\rho^2<2a\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta>0\right\}=\left\{(\theta,\rho)\,\middle|\,0<\rho<a\cos\theta,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\theta}\rho^2 d\rho\right)d\theta=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\,d\theta=\frac{2a^3}{9}$$

Exemplul 5.5.3. Să se calculeze $\iint_D(y-x+2)\,dx\,dy$, unde

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$. Ecuaţia $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ este ecuaţia unei elipse de semiaxe a şi b. În acest caz se folosesc coordonate polare generalizate şi anume

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}$$

$0<\rho<1$ şi $0<\theta<2\pi$.

Iacobianul transformării este $ab\rho$.

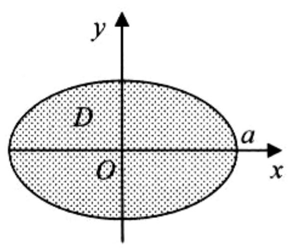


Fig. 11

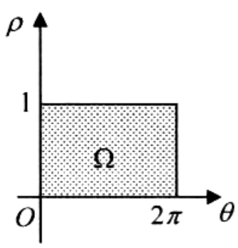


Fig. 12

$$\iint\limits_D (y-x+2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (b\rho\sin\theta - a\rho\cos\theta + 2)ab\rho\right)d\rho\, d\theta =$$

$$= ab^2\int_0^{2\pi}\sin\theta\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 d\theta - a^2b\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 d\theta + 2ab\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 d\theta = 2\pi ab\,.$$

5.6. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DUBLE ÎN GEOMETRIE ŞI MECANICĂ

O primă aplicație a integralei duble în geometrie a fost evidențiată în proprietățile integralei duble şi anume: aria $D = \iint\limits_D 1\cdot dx\,dy$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$, este un domeniu mărginit care are arie.

Fie $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție a domeniului D şi fie $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ un punct arbitrar. Reamintim că:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\|\rho\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\, D_i\,,$$

sensul exact fiind următorul:

Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi partiția ρ a domeniului D, cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi punctele intermediare $(\xi_i,\eta_i) \in D_i$, avem:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\, D_i - I\right| < \varepsilon\,.$$

5.6.1. Masa unei plăci plane

Prin placă plană înțelegem o placă având forma unui domeniu mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$, care are arie. Placa este considerată în general neomogenă, densitatea sa fiind dată de funcția continuă $f : D \to \mathbb{R}_+$. Fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție oarecare a domeniului D şi fie $(\xi_i,\eta_i) \in D_i$ arbitrar. Masa plăcii D_i se aproximează cu produsul $f(\xi_i,\eta_i)\cdot \text{aria}\, D_i$. Aproximarea este cu atât mai bună cu cât norma partiției ρ este mai mică. Prin urmare avem:

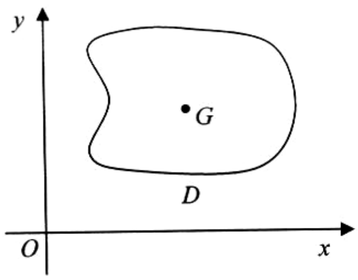


Fig. 1

$\text{masa}(D) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\, D_i$ şi mai departe:

$$\text{masa}(D) = \lim_{\|\rho\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy .$$

5.6.2. Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane

Fie D o placă neomogenă de densitățile $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_+$ şi fie (x_G, y_G) coordonatele centrului său de greutate G. Considerăm ca mai înainte o partiție ρ: $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi nişte puncte arbitrare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Masa plăcii D_i se aproximează cu produsul $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}\, D_i$. Dacă vom considera masa plăcii D_i concentrată într-un singur punct şi anume în punctul (ξ_i, η_i), atunci coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i}, \qquad y_G \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i} .$$

Presupunând că f este continuă pe D, la limită obținem:

$$x_G = \lim_{\|\rho\|\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i} = \frac{\iint_D x f(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy}$$

$$y_G = \lim_{\|\rho\|\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \,\text{aria}\, D_i} = \frac{\iint_D y f(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy} .$$

În cazul particular al unei plăci omogene ($f(x, y) = \kappa$, $\forall (x, y) \in D$) rezultă:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\iint_D x\, dx\, dy}{\iint_D dx\, dy} \\[2ex] y = \dfrac{\iint_D y\, dx\, dy}{\iint_D dx\, dy} \end{cases}$$

Exemplul 5.6.1. Să se afle coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane omogene care are forma domeniului

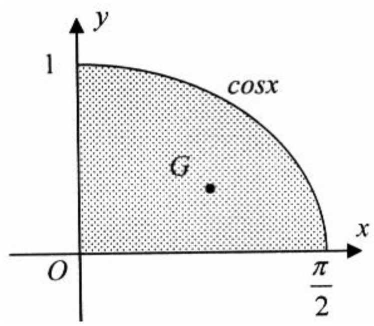


Fig. 2

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\cos x\right\}.$$

Avem

$$\iint_D dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x}dy\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1$$

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x}x\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx=$$

$$=x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x}y\,dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{8}.$$

Aşadar, avem

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\pi}{2}-1 \\ y_G=\dfrac{\pi}{8} \end{cases}.$$

5.6.3. Momentul de inerție al unei plăci plane

Se ştie că momentul de inerție al unui punct material în raport cu o anumită axă este egal cu produsul dintre masa punctului şi pătratul distanței de la punct la axă. În cazul unui sistem de puncte materiale, momentul de inerție în raport cu o axă este suma momentelor de inerție ale punctelor materiale care formează sistemul.

Fie D o placă plană de densitate continuă $f:\overline{D}\to\mathbb{R}_+$, fie $\rho: D_1, D_2,\dots,D_n$ o partiție oarecare a sa şi fie $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ oarecare. Aproximăm ca şi mai înainte masa plăcii D_i cu produsul $f(\xi_i,\eta_i)\cdot \text{aria}(D_i)$ şi considerăm această masă concentrată în punctul (ξ_i,η_i). Momentul de inerție al acestui sistem de puncte materiale în raport cu axa Oy va fi egal cu suma: $\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 f(\xi_i,\eta_i)\cdot\text{aria}(D_i)$.

Dacă nrma partiției ρ este mică, această sumă poate fi considerată ca o valoare aproximativă a momentului de inerție I_y al plăcii plane D în raport cu axa Oy. La limită avem:

$$I_y = \lim_{\|\rho\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i) = \iint_D x^2 f(x,y)\,dx\,dy .$$

În mod analog momentul de inerție în raport cu axa Ox este

$$I_x = \iint_D y^2 f(x,y)\,dx\,dy .$$

Dacă placa plană este omogenă de densitate $f(x,y) = 1$, $\forall\ (x,y)$ atunci

$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy , \quad I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy .$$

De asemenea, se poate calcula momentul de inerție al plăcii D în raport cu originea $O(0,0)$. Obținem formulele

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) f(x,y)\,dx\,dy \text{ respectiv } I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy .$$

Exemplul 5.6.2. Să se afle momentul de inerție în raport cu axa Oy (respectiv în raport cu originea) a plăcii plane omogene D de densitate 1, unde: $D = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le r^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0 \right\}$. Avem

$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^r \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho\,d\rho \right) d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{r^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi r^4}{16}$$

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^r \rho^2 \cdot \rho\,d\rho \right) = \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\,d\theta = \frac{\pi r^4}{8} .$$

5.7. FORMULA LUI GREEN

Formula lui Green face legătura între integrala dublă şi integrala curbilinie de speța a doua.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit a cărui frontieră C este o curbă netedă pe porțiuni şi constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Fie P, Q: $\overline{D} \to \mathbb{R}$ două funcții continue cu proprietatea că există $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi sunt continue pe $\overline{D}$. Cu aceste precizări formula lui Green este următoarea:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \overleftarrow{\oint_C} P\,dx + Q dy \qquad (1)$$

În această formulă orientarea curbei C (sensul de parcurgere al curbei C) este aleasă astfel încât domeniul D să rămână la stânga.

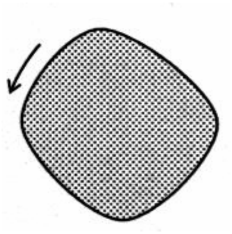


Fig. 1

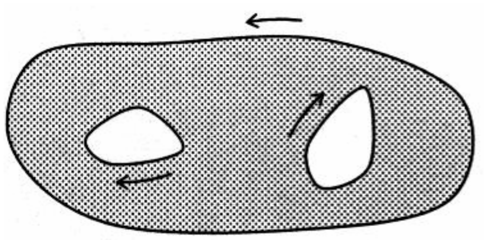


Fig. 2

În figura 1 am exemplificat orientarea curbei C = fr$D$ pentru domeniul a cărui frontieră constă dintr-o singură curbă închisă, iar în figura 2 pentru un domeniu a cărui frontieră constă într-o reuniune finită de mai multe curbe închise.

Definiția 5.7.1 *Prin domeniu elementar de tip Green* (G *– domeniu elementar*) *vom înțelege oricare din cele cinci domenii reprezentate în figura 3*.

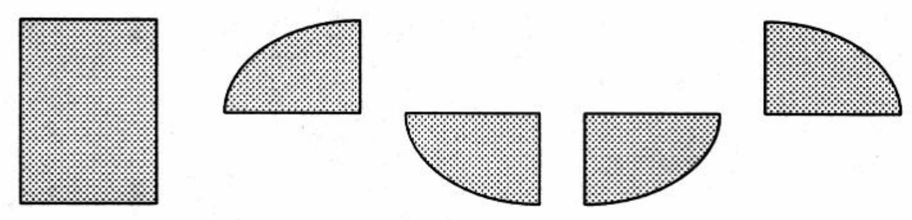


Fig. 3

Lema 5.7.1 *Formula lui Green este verificată pentru orice G-domeniu elementar*.

Demonstrație.

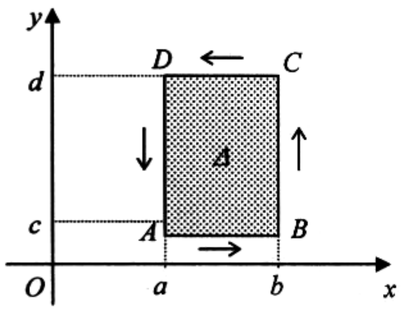


Fig. 4

Pentru început considerăm un domeniu Δ a cărui frontieră este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate:

$$\Delta = \{(x,y),\ a < x < b,\ c < y < d\}.$$

Putem considera următoarele reprezentări parametrice pentru laturile dreptunghiului:

$$\overline{AB}: x = t,\ y = c,\ t \in [a,b]$$
$$\overline{BC}: x = b,\ y = t,\ t \in [c,d]$$
$$\overline{DC}: x = t,\ y = d,\ t \in [a,b]$$
$$\overline{AD}: x = a,\ y = t,\ t \in [c,d].$$

Avem:

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \left(Q(x,y)\Big|_a^b \right) dx = \int_c^d Q(b,y)\, dy - \int_c^d Q(a,y)\, dy \quad (2)$$

Ţinând seama de modul de calcul al integralei curbilinii de speța a doua rezultă:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\overline{AB}} Q(x,y)\, dy = \int\limits_{\overline{CD}} Q(x,y)\, dy = 0 \\ &\int\limits_{\overline{BC}} Q(x,y)\, dy = \int_c^d Q(b,t)\, dt \quad \text{şi} \quad \int\limits_{\overline{AD}} Q(x,y)\, dy = \int_c^d Q(a,t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Din (2) şi (3) deducem

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{\overline{BC}} Q\, dy + \int\limits_{\overline{CD}} Q\, dy + \int\limits_{\overline{DA}} Q\, dy + \int\limits_{\overline{AB}} Q\, dy = \overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\Delta}} Q\, dy \quad (4)$$

În mod analog avem

$$-\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_a^b \left(P(x,y)\Big|_c^d \right) dx =$$
$$= -\int_a^b P(x,d)\, dx + \int_a^b P(x,c)\, dx \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\overline{BC}} P\, dx = \int\limits_{\overline{AD}} P\, dx = 0 \\ &\int\limits_{\overline{AB}} P(x,y)\, dx = \int_a^b P(t,c)\, dt\ ; \quad \int\limits_{\overline{DC}} P(x,y)\, dx = \int_c^d P(t,d)\, dt \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Din (5) şi (6) deducem:

$$-\iint_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}dx=\int_{\overline{AB}}P\,dx+\int_{\overline{BC}}P\,dx+\int_{\overline{CD}}P\,dx+\int_{\overline{DA}}P\,dx=\overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\Delta}}P\,dx \tag{7}$$

Adunând formulele (4) şi (7) obţinem formula lui Green.

Să considerăm acum un domeniu G-elementar ca cel din figura 5. Mai precis, un astfel de domeniu se defineşte astfel:

Fie $f:[a,b]\to[c,d]$ o funcţie continuă, strict crescătoare şi surjectivă.

$\Delta=\{(x,y);\ a<x<b;\ c<y<f(x)\}$.

Avem

$$-\iint_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=-\int_a^b\left(\int_c^{f(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx=-\int_a^b P(x,f(x))\,dx+\int_a^b P(x,c)\,dx \tag{8}$$

Considerând următoarele reprezentări parametrice ale arcului $\overset{\frown}{AE}$ şi ale segmentelor $\overline{AB}$ şi $\overline{BE}$:

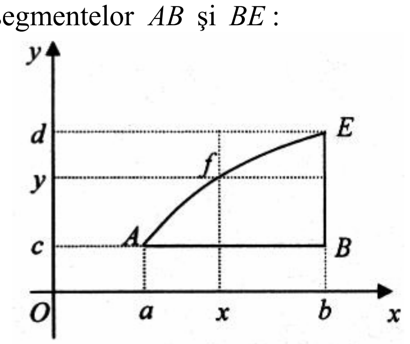


Fig. 5

$\overset{\frown}{AE}: x=t,\ y=f(t),\ t\in[a,b]$

$\overline{AB}: x=t,\ y=c,\quad t\in[a,b]$

$\overline{BE}: x=b,\ y=t,\quad t\in[c,d]$

deducem

$$\int_{\overset{\frown}{AE}}P(x,y)\,dx=\int_a^b P(t,f(t))\,dt;$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\overline{AB}}P(x,y)\,dt=\int_a^b P(t,c)\,dt\\ \displaystyle\int_{\overline{BC}}P(x,y)\,dx=0\end{array}\right\} \tag{9}$$

Din (8) şi (9) rezultă:

$$-\iint_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\int_{\overline{AB}}P\,dx+\int_{\overline{BC}}P\,dx+\int_{\overset{\frown}{EA}}P\,dx=\overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\Delta}}P\,dx \tag{10}$$

Pe de altă parte avem:

$$\iint_{\Delta}\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{f^{-1}(y)}^b\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)dy=\int_c^d\left(Q(x,y)\Big|_{f^{-1}(y)}^b\right)dy=$$

$$=\int_c^d Q(b,y)\,dy-\int_c^d Q\left[f^{-1}(y),y\right]dy \tag{11}$$

De data aceasta, considerând pentru arcul $\overset{\frown}{AE}$ reprezentarea parametrică:

$\overset{\frown}{AE}: x=f^{-1}(t),\ y=t,\ t\in[c,d]$, deducem

$$\int_{\overset{\frown}{AE}}Q(x,y)\,dy=\int_c^d Q\left[f^{-1}(t),t\right]dt \tag{12}$$

Pentru segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{BE}$ avem:

$$\int_{\overline{AB}} Q(x,y)\,dy = 0 \quad \text{şi} \quad \int_{\overline{BE}} Q(x,y)\,dy = \int_c^d Q(b,t)\,dt \tag{13}$$

Din (11), (12) şi (13) rezultă:

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\overline{AB}} Q\,dy + \int_{\overline{BE}} Q\,dy + \int_{\overset{\frown}{EA}} Q\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\,\Delta}} Q\,dy \tag{14}$$

Adunând formulele (10) şi (14) obținem formula lui Green pentru domeniul considerat în figura 5.

Este evident că demonstrațiile formulei lui Green pentru celelalte domenii G-elementare din figura 3 sunt absolut analoage.

Teorema 5.7.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit a cărui frontieră este netedă pe porțiuni și constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Presupunem în plus că domeniul D este o reuniune finită de G-domenii elementare care nu au puncte interioare comune. Dacă $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue pe $\overline{D}$, atunci are loc formula lui Green:*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\,D}} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Demonstrație.

Să presupunem că $\overline{D} = \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D}_k$ unde $\overline{D}_k$ este un G-domeniu elementar, $\forall\, k = \overline{1,m}$. (Vezi Fig. 6).

Ținând seama de Lema 5.7.1 rezultă

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{m} \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{m} \overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\,D_k}} P\,dx + Q\,dy \tag{15}$$

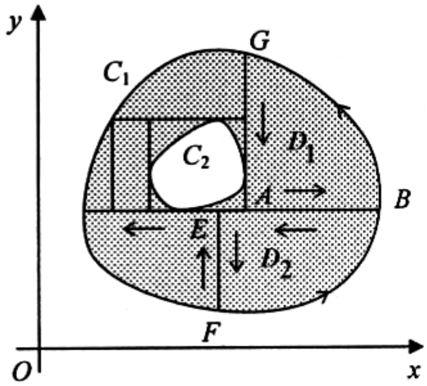


Fig. 6

Frontiera domeniului D se compune din curbele C_1 şi C_2 . Reuniunea frontierelor domeniilor $D_1,\ldots,D_m$ se compune din curbele C_1 şi C_2 şi un număr finit de segmente de dreaptă incluse în D paralele cu axele de coordonate. Fiecare asemenea segment de dreaptă face parte din frontierele a două G-domenii elementare vecine. De exemplu $\overline{AB}$ face parte din frontierele domeniilor D_1 şi D_2 . Să observăm că integralele curbilinii din membrul drept al egalității (15) calculată pe segmentele interioare dispar, deoarece orice astfel de segment este parcurs de două ori în sensuri opuse. De exemplu:

$$\overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_1} = \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BG}} + \int_{\overline{GA}} \quad \text{şi} \quad \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_2} = \int_{\overline{FB}} + \int_{\overline{BA}} + \int_{\overline{AE}} + \int_{\overline{EF}}$$

Contribuția segmentului $\overline{AB}$ în suma $\overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_1} + \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_2}$ este $\int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BA}} = 0$.

Aşadar rezultă

$$\sum_{k=1}^{m} \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_k} P\,dx + Q\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint}_{C_1 \cup C_2 = \mathrm{Fr}D} P\,dx + Q\,dy \tag{16}$$

Din (15) şi (16) deducem:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D} P\,dx + Q\,dy \; .$$

Teorema 5.7.2. *Formula lui Green este valabilă pentru orice domeniu poligonal.*

Demonstrație. Deoarece orice domeniu poligonal este o reuniune finită de domenii triunghiulare este suficient să demonstrăm teorema pentru domenii triunghiulare. Fie Δ un domeniu triunghiular oarecare de frontieră ABC. Ducem din

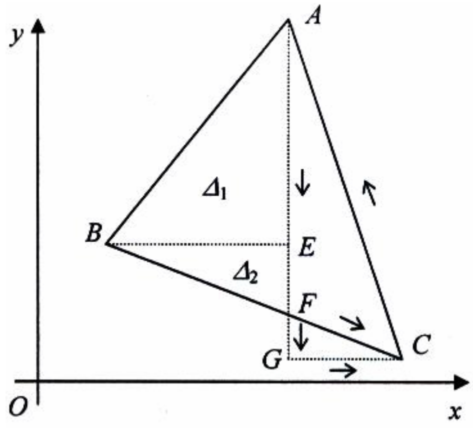


Fig. 7

A o paralelă la Oy, din C o paralelă la Ox şi notăm cu G intersecţia lor. De asemenea, ducem prin B o paralelă la Ox şi notăm cu E intersecţia sa cu dreapta AF. Domeniul Δ este reuniunea domeniilor Δ_1, Δ_2 şi Δ_3, unde Δ_1 are frontiera ABE, Δ_2 are frontiera BEF iar Δ_3 are frontiera AFC. Observăm că Δ_1 şi Δ_2 sunt G-domenii elementare, în timp ce Δ_3 nu are această proprietate. Este clar însă, că Δ_3 se poate reprezenta ca diferenţa a două G-domenii elementare.

Într-adevăr, dacă notăm cu Δ_4 domeniul de frontieră AGC şi cu Δ_5 domeniul de frontieră FGC, atunci Δ_4 şi Δ_5 sunt G-domenii elementare şi $\Delta_3 = \Delta_4 \setminus \Delta_5$.

Ţinând seama de Lema 5.7.1 rezultă:

$$\iint\limits_{\Delta_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{\Delta_4}-\iint\limits_{\Delta_5}=\int\limits_{\overline{AG}}+\int\limits_{\overline{GC}}+\int\limits_{\overline{CA}}-\left(\int\limits_{\overline{AG}}+\int\limits_{\overline{GC}}+\int\limits_{\overline{CF}}\right)=\int\limits_{\overline{AF}}+\int\limits_{\overline{FC}}+\int\limits_{\overline{CA}}=$$

$$=\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,\Delta_3}} P\,dx+Q\,dy\ .$$

Aşadar, formula lui Green este variabilă şi pe Δ_3, deci este variabilă pe Δ.

Observaţia 5.7.1 Se poate arăta că formula lui Green este variabilă pentru orice domeniu a cărui frontieră este o curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.

Într-adevăr, se poate arăta că există un şir de linii poligonale C_n, înscrise în $C = \mathrm{fr}D$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{C_n} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{C} P\,dx+Q\,dy\ .$$

Dacă notăm cu D_n domeniul mărginit care are frontiera C_n, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\ .$$

Din Teorema 5.7.2 rezultă că formula lui Green este valabilă pe D_n, pentru orice $n\in\mathbb{N}^{*}$. Prin trecere la limită, va rezulta că formula lui Green este valabilă şi pentru domeniul D.

Exemplul 5.7.1. Să se calculeze $\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,D}} (xy-y)\,dx+(xy+x)dy$ unde

$D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

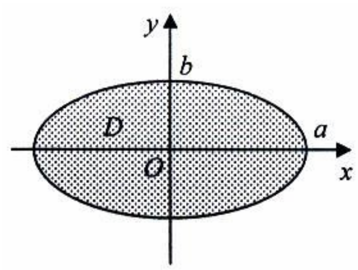


Fig. 8

Dacă notăm cu $P(x,y)=xy-y$ şi cu $Q(x,y)=xy+x$, atunci, din formula lui Green rezultă că

$$\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,D}} (xy-y)\,dx+(xy+x)dy=$$

$$=\iint\limits_{D_n}(2+y-x)\,dx\,dy.$$

Fiind vorba de un domeniu elipsoidal vom folosi coordonate polare generalizate şi anume

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi],\ \rho\in[0,1].$$

În continuare avem

$$\iint\limits_{D}(2+y-x)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(2+b\rho\sin\theta-a\rho\cos\theta)ab\rho\,d\theta\right)d\rho=$$

$$=2ab\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi ab.$$

Observaţia 5.7.2 Dacă $D\subset\mathbb{R}^2$ este un domeniu care are arie şi pentru care e valabilă formula lui Green, atunci aria(D)$=\dfrac{1}{2}\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,D}} x\,dy-y\,dx$.

Într-adevăr, dacă notăm cu $P(x,y)=-\dfrac{y}{2}$ şi cu $Q(x,y)=\dfrac{x}{2}$, atunci $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$. Pe de altă parte ştim că aria $D=\iint\limits_{D}1\,dx\,dy$. Aplicând acum formula lui Green rezultă:

$$\text{aria } D=\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,D}} P\,dx+Q\,dy=\frac{1}{2}\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,D}} x\,dy-y\,dx.$$

Exemplul 5.7.2 să se calculeze aria domeniului elipsoidal $D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$.

Conform Observației 5.7.2, avem: aria$(D)=\dfrac{1}{2}\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,D}} x\,dy-y\,dx$.

Fie $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$ o reprezentare parametrică a elipsei $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. În continuare avem:

$$\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\,D}} x\,dy-y\,dx=\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\cos t\right)dt=2\pi ab\,,$$

de unde rezultă că aria $D=\pi ab$.

Observația 5.7.3 Se poate arăta că teorema 5.7.1 rămâne valabilă şi într-o ipoteză mai slabă referitoare la funcțiile P şi Q şi anume P şi Q sunt continue pe $\overline{D}$ iar $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue şi mărginite pe D.

5.8. INTEGRALE DUBLE GENERALIZATE

În acest paragraf introducem noțiunea de integrală dublă generalizată, care acoperă atât cazul când domeniul este nemărginit, cât şi cazul când funcția este nemărginită.

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit sau nu şi fie $f: D\to$ P, mărginită sau nu. Vom presupune că f este integrabilă pe orice submulțime a lui D care are arie.

Definiția 5.8.1 *Spunem că* $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă, dacă pentru orice şir de domenii mărginite, care au arie,* $\{D_n\}$ *cu proprietățile*:

(i) $D_1\subset D_2\subset\ldots\subset D_n\subset\ldots$

(ii) $\overline{D}_n\subset D_{n+1}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$

(iii) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n=D$

există $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ *e finită şi nu depinde de alegerea şirului* $\{D_n\}$.

În cazul când limita nu există, sau e infinită, spunem că $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ este divergentă.

Teorema 5.8.1. *Dacă* $f(x,y) \geq 0$, $\forall\ (x,y) \in D$, *atunci* $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă dacă şi numai dacă există cel puţin un şir* $\{D_n\}$ *de domenii mărginite, care au arie, cu proprietăţile* (i)-(iii), *pentru care şirul* $\{a_n\}$, *unde* $a_n = \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$, *este mărginit.*

Demonstraţie. **Necesitatea** este evidentă

Suficienţa. Fie $\{D_n\}$ un şir de domenii mărginite care au arie cu proprietăţile (i)-(iii) şi fie $a_n = \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$. Din (i) şi din faptul că $f \geq 0$ pe D, rezultă că $\{a_n\}$ este monoton crescător. Cum prin ipoteză $\{a_n\}$ este mărginit, rezultă că $\{a_n\}$ este convergent. Fie $I = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Rămâne să arătăm că $I = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ este independentă de alegerea şirului $\{D_n\}$.

Fie $\{D'_n\}$ un alt şir de domenii mărginite care au arie, cu proprietăţile (i)-(iii) şi fie $a'_n = \iint\limits_{D'_n} f(x,y)\,dx\,dy$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Să observăm că $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\overline{D'_n} \subset D_m \tag{1}$$

Într-adevăr, în caz contrar, există un punct $M_k \in \overline{D'_n}$ astfel încât $M_k \notin D_k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$. Obţinem astfel un şir de elemente $\{M_k\}$ din $\overline{D'_n}$. Cum $\overline{D'_n}$ este mărginită şi închisă, rezultă că acest şir conţine un subşir $\{M_{k_m}\}$ convergent. Dacă notăm cu $M = \lim\limits_{m\to\infty} M_{k_m}$, atunci $M \in \overline{D'_n} \subset D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Fie $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M \in D_{n_1}$. Cum D_{n_1} este deschisă, deducem că există o vecinătate V a punctului M astfel încât $V \subset D_{n_1}$. Pe de altă parte, deoarece $M_k \to M$, rezultă că există un rang $k_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M_k \in V$, $\forall\ k \geq k_1$. În particular, rezultă că $M_{k_1} \in V \subset D_{k_1}$, ceea ce contrazice modul de alegere a punctelor M_k. Aşadar, am demonstrat incluziunea (1). Din (1) rezultă că

$$a'_n \leq a_m \leq I \tag{2}$$

Cum $\{a'_n\}$ este crescător, deducem că $\{a'_n\}$ este convergent şi $I' = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n \leq I$.

Inversând rolul şirurilor $\{D_n\}$ şi $\{D'_n\}$ rezultă că $I \leq I'$, deci $I = I'$.

Exemplul 5.8.1. Să se studieze convergența integralei generalizate $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dx\,dy$, unde $D=\mathbb{R}^2$. Observăm că este o integrală generalizată în care domeniul D este nemărginit. Deoarece $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\geq 0$, $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, rezultă că este suficient să găsim un şir de domenii mărginite, care au arie $\{D_n\}$, pentru care şirul cu termenul general $a_n=\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ este mărginit.

Alegem $D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<n^2\}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Este evident că $\{D_n\}$ are proprietățile (i)-(iii). Pe de altă parte,

$$a_n=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^n e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)=\pi\left(1-e^{-n^2}\right)\to\pi .$$

Rezultă că integrala este convergentă şi $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\pi$.

Pe de altă parte fie $D_n'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|<n,\ |y|<n\}$. Şirul $\{D_n'\}$ este un şir de pătrate pline, care îndeplineşte condițiile (i)-(iii), rezultă că

$$\pi=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2-y^2}dx\right)dy=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-n}^{n}e^{-y^2}dy\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}dx\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2$$

(S-a folosit faptul că $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ este convergentă).

Am calculat astfel integrala lui Poisson şi anume $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Exemplul 5.8.2. Să se studieze convergența integralei generalizate $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}}$, $\alpha>0$, unde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<a^2\}$.

Observăm că funcția $f(x,y)=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}}$ nu este definită în $O(0,0)$ şi nu este mărginită pe D.

Fie $D_n=D\setminus B\left(0;\frac{1}{n}\right)=\left\{(x,y);\ \frac{1}{n^2}\leq x^2+y^2\leq a^2\right\}$. Este clar că $\{D_n\}$ este un şir de domenii mărginite, care are arie şi care îndeplineşte condițiile (i)-(iii), iar f este continuă pe D_n, deci integrabilă pe D_n. În continuare avem:

$$\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi}\left(\int_{1/n}^{a} \frac{\rho}{\rho^{\alpha}}\mathrm{d}\rho\right) = \frac{2\pi}{2-\alpha}\cdot\left[a^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}\right].$$

Observăm că dacă $\alpha < 2$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi\cdot a^{2-\alpha}}{2-\alpha}$.

Aşadar, dacă $\alpha < 2$. integrala este convergentă şi $\iint_{D} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\cdot a^{2-\alpha}$.

Dacă $\alpha > 2$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = +\infty$.

Pentru $\alpha = 2$, avem $\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^{a} \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi\left[\ln a - \ln\frac{1}{n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Rezultă că $\iint_{D} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ este divergentă.

Exemplul 5.8.3. Să se studieze convergența integralei $\iint_{D} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}}$, unde $D = \left\{(x,y);\ x^2+y^2 > a^2,\ a > 0\right\}$. Evident, domeniul D este nemărginit.

Dacă notăm cu $D_n = \left\{(x,y);\ a^2 < x^2+y^2 < n^2\right\}$, rezultă că $\{D_n\}$ satisface condițiile (i)-(iii).

Pe de altă parte, procedând ca în exercițiul precedent deducem că

$\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{\alpha-2}\cdot\left[n^{2-\alpha} - a^{2-\alpha}\right]$, dacă $\alpha \neq 2$ şi $\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi\left[\ln n - \ln a\right]$.

Rezultă că integrala este convergentă dacă $\alpha > 2$ şi divergentă dacă $\alpha \leq 2$.

Teorema 5.8.2. *Fie f, g: D → P₊, cu proprietatea* $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall\ (x,y)\in D$. *Dacă* $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă, atunci şi* $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă.*

Afirmația rezultă imediat din Teorema 5.8.1 şi din inegalitatea

$a_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_n} g(x,y)\,dx\,dy = b_n$, $\forall\ n$.

Definiția 5.8.2 *Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, integrabilă pe orice bilă închisă B_r, cu centrul în origine şi de rază R. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{B_r} f(x,y)\,dx\,dy$ şi e finită, atunci, această limită se numeşte valoarea principală în sensul lui Cauchy a integralei generalizate $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$.*

Se foloseşte notația:

$$V.p. \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{r\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Exemplul 5.8.4. $V.p. \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x\cdot h\left(x^2+y^2\right)dx\,dy = 0$, oricare ar fi h o funcție continuă pe $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr,

$$\lim_{r\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} x\cdot h\left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^r \rho^2 \ln\rho^2\,d\rho = 0.$$

5.9. INTEGRALE TRIPLE

După cum am văzut în acest capitol, trecerea de la integrala simplă la integrala dublă, pe lângă multe analogii, presupune şi unele modificări de substanță, atât în planul conceptelor, cât şi în cel al raționamentelor. Aceste modificări îşi au originea în principal, în teoria mulțimilor plane măsurabile (care au arie). În contrast cu această situație, trecerea de la integrala dublă la integrala triplă nu presupune nici un fel de complicație. Pentru început se impune introducerea noțiunii de volum. Din geometria elementară se ştie că volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor sale. În particular, dacă T este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică $T=[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]$, atunci

$$\mathrm{Vol}(T)=(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1).$$

Definiția 5.9.1 *Prin mulțime elementară în spațiu înțelegem orice reuniune finită de paralelipipede dreptunghice cu muchiile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.*

Volumul unei astfel de mulțime este prin definiție suma volumelor paralelipipedelor care o compun. Mai precis, T este o mulțime elementară dacă există $T_i=[a_{i1},a_{i2}]\times[b_{i1},b_{i2}]\times[c_{i1},c_{i2}]$, $i=\overline{1,p}$ astfel încât $T=\bigcup\limits_{i=1}^{p} T_i$ şi $\overset{\circ}{T_i}\cap\overset{\circ}{T_j}=\varnothing$ pentru $i\ne j$.

$$\mathrm{Vol}(T) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Vol}(T_i) = \sum_{i=1}^{p} (a_{i2} - a_{i1})(b_{i2} - b_{i1})(c_{i2} - c_{i1}) .$$

În continuare notăm cu $\mathcal{T}$ familia tuturor mulțimilor elementare din spațiu.

Definiția 5.9.2 *Fie T un domeniu mărginit din* $\mathbb{R}^3$. *Se numește volumul interior al lui T următorul număr*:

$$V_* = \sup\{\mathrm{Vol}(T');\ T' \subset T,\ T' \in \mathcal{T}\}$$

(În cazul când nu există $T' \in \mathcal{T}$ astfel încât $T' \subset T$, vom defini $V_* = 0$).

În mod analog, definim volumul exterior astfel:

$$V^* = \inf\{\mathrm{Vol}(T'');\ T'' \supset T,\ T'' \in \mathcal{T}\}$$

Este evident că $V_* \le V^*$.

Spunem că domeniul *T* este măsurabil (are volum) dacă $V_* = V^* = V$. Dacă *T* are volum, atunci prin definiție $\mathrm{Vol}(T) = V = V_* = V^*$.

Observația 5.9.1 Orice mulțime elementară în spațiu are volum în sensul definiției 5.9.2 și acesta coincide cu cel din Definiția 5.9.1.

Teorema 5.9.1. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domeniu mărginit care are arie și fie* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_+$ *o funcție continuă. Dacă notăm cu*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \overline{D},\ 0 \le z \le f(x, y)\}$$

atunci T are volum și $\mathrm{Vol}(T) = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Demonstrație.

Din punct de vedere geometric domeniul *T* este un corp cilindric mărginit inferior de domeniul *D*, lateral de suprafața cilindrică, care are generatoarele paralele cu axa *Oz* și curba directoare fr(*D*), iar superior de graficul funcției $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$.

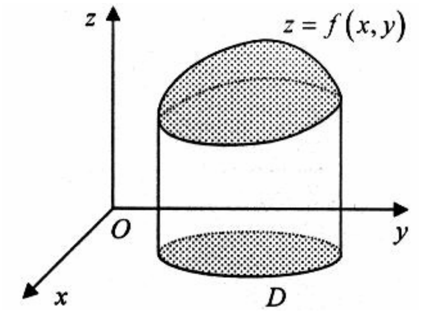


Fig. 1

Considerăm în planul xOy o rețea S_k de pas $h = 2^{-k}$, formată de dreptele $x = ph$, $y = lh$, $p, l \in \mathbb{Z}$. Fie I_k familia tuturor pătratelor (pline) Δ_h ale rețelei S_k incluse în D şi fie P_k reuniunea acestor pătrate. Conform Observației 5.2.3 avem

$$\text{aria}\, D = \sup_k \text{aria}\, P_k = \lim_{k\to\infty} \text{aria}\, P_k \qquad (1)$$

Fie m_h (respectiv M_h) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției f pe domeniul D_h şi fie $s_k = \sum\limits_{D_h \in I_k} m_h \,\text{aria}\, D_h$. Ținând seama de (1) şi de faptul că f este integrabilă pe D rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

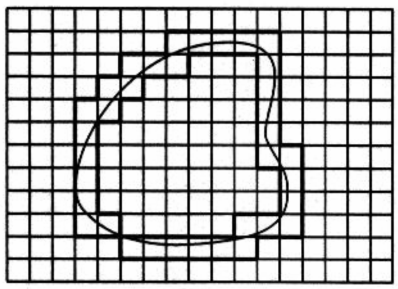


Fig. 2

Fie J_k familia tuturor pătratelor D_h care conțin cel puțin un punct din D şi fie Q_k reuniunea acestor pătrate. Evident $P_k \subset D \subset Q_k$. Mai mult, se poate arăta că

$$\text{aria}\, D = \inf_k \text{aria}\, Q_k = \lim_{k\to\infty} \text{aria}\, Q_k \qquad (2)$$

Dacă notăm cu $S_k = \sum\limits_{D_h \in J_k} M_h \,\text{aria}\, D_h$, (cu precizarea că dacă $D_h \in J_k \setminus I_k$, atunci $M_h = \sup\{f(x,y); (x,y) \in D_h \cap D\}$, atunci $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Fie T_h' paralelipipedul dreptunghic cu muchiile paralele cu axele de coordonate de bază Δ_h şi înălțime m_k şi fie $T_k' = U\{T_h; \Delta_h \in I_k\}$. Este evident că T_k' este o mulțime elementară în spațiu, $T_k' \subset T$ şi $\text{Vol}(T_k') = s_k$.

Pe de altă parte, dacă notăm cu T_h'' paralelipipedul dreptunghic de bază Δ_h şi înălțime M_h şi cu $T_k'' = U\{T_h''; \Delta_h \in J_k\}$, atunci T_k'' este o mulțime elementară în spațiu, $T_k'' \supset T$ şi $\text{Vol}(T_k'') = S_k$. În continuare avem:

$$0 \le V^* - V_* \le \text{Vol}(T_k'') - \text{Vol}(T_k') = S_k - s_k.$$

Cum $\lim\limits_{k\to\infty} S_k - s_k = 0$, rezultă că

$$V^* = V_* = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Observaţia 5.9.2 Din Teorema 5.9.1 rezultă interpretarea geometrică a integralei duble. Dacă $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_+$ este continuă, atunci $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ este volumul corpului cilindric mărginit inferior de *D*, lateral de suprafaţa cilindrică cu generatoarele paralele cu *Oz* şi curba directoare *C* =fr*D* şi superior de suprafaţa $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$ (Vezi fig. 1).

Demonstraţia următoarei teoreme este complet analoagă cu cazul domeniilor plane.

Teorema 5.9.2. *Un domeniu* $T \subset \mathbb{R}^3$ *are volum dacă şi numai dacă pentru* $\forall\ \varepsilon > 0$ *există două mulţimi elementare în spaţiu* P_ε *şi* Q_ε *astfel încât* $P_\varepsilon \subset T \subset Q_\varepsilon$ *şi* $\mathrm{Vol}(Q_\varepsilon) - \mathrm{Vol}(P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Definiţia 5.9.2 *O mulţime* $A \subset \mathbb{R}^3$ *este de volum zero dacă* $\forall\ \varepsilon > 0$, *există o mulţime elementară în spaţiu* P_ε *cu proprietăţile:* $A \subset P_\varepsilon$ *şi* $\mathrm{Vol}(P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Ţinând seama de această definiţie, Teorema 5.9.2 se poate reformula astfel:

Teorema 5.9.3. *Un domeniu mărginit* $T \subset \mathbb{R}^3$ *are volum dacă şi numai dacă frontiera sa este de arie zero.*

Fie acum $T \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit şi fie $\rho : T_1, T_2, \ldots, T_n$ o familie de subdomenii cu proprietăţile:

1) $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$

2) $\overset{\circ}{T_i} \cap \overset{\circ}{T_j} = \varnothing$ dacă $i \neq j$

3) T_i are volum, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

O astfel de familie de subdomenii se numeşte partiţie a lui *T*. Se numeşte norma partiţiei ρ cel mai mare diametru dintre diametrele domeniilor T_i, $i = \overline{1,n}$. Aşadar $\|\rho\| = \max\{\mathrm{diam}(T_i),\ 1 \le i \le n\}$, unde

$$\mathrm{diam}(T_i) = \sup\{\mathrm{dist}(M', M'');\ M', M'' \in T_i\}.$$

Definiţia 5.9.3 *Fie* $T \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu mărginit care are volum, fie* $f : T \to \mathrm{P}$ *şi fie* $\rho : T_1, T_2, \ldots, T_n$ *o partiţie oarecare a lui T. Notăm cu* P_i *un punct oarecare din subdomeniul* T_i *şi cu*

$$\sigma_\rho(f, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\mathrm{Vol}(T_i).$$

Spunem că f este integrabilă pe domeniul T dacă există un număr finit I cu proprietatea că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi partiția ρ a lui T cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi punctele $P_i \in T_i$ avem:

$\left|\sigma_\rho(f, P_i) - I\right| < \varepsilon$.

Numărul I se numeşte integrala triplă a funcției f pe domeniul T şi se foloseşte notația: $I = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. De asemenea, vom scrie

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\|\rho\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\operatorname{Vol}(T_i),$$

sensul exact fiind cel din Definiția 5.9.3.

Proprietățile integralei triple sunt complet analoage cu proprietățile integralei duble. În particular se poate arăta că orice funcție continuă este integrabilă.

Definiția 5.9.4 *Un domeniu $T \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte simplu în raport cu axa Oz dacă există un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ care are arie şi două funcții continue $\varphi, \psi : \overline{D} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$, $\forall\ (x,y) \in D$ astfel încât*

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \varphi(x,y) < z < \psi(x,y),\ \forall\ (x,y) \in D\right\}.$$

Din Teorema 5.9.1 rezultă că un astfel de domeniu are volum şi

$$\operatorname{Vol}(T) = \iint\limits_D \psi(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_D \varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorema 5.9.4. *Fie $T \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu Oz şi fie $f : T \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci*:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy.$$

Exemplul 5.9.1. Să se calculeze volumul tetraedrului T mărginit de planele: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ şi $x + 2y + z - 6 = 0$. Proiecția tetraedrului T în planul xOy este triunghiul (plin) $D = \left\{(x,y);\ 0 \le x \le 6;\ 0 \le y \le 3 - \dfrac{x}{2}\right\}$ iar T este următorul domeniu simplu în raport cu Oz: $T = \left\{(x,y,z);\ 0 \le z \le 6 - x - 2y, (x,y) \in D\right\}$.

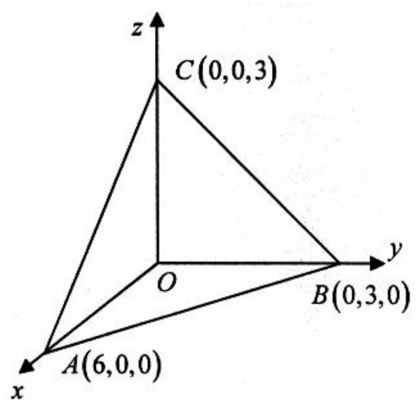


Fig. 3

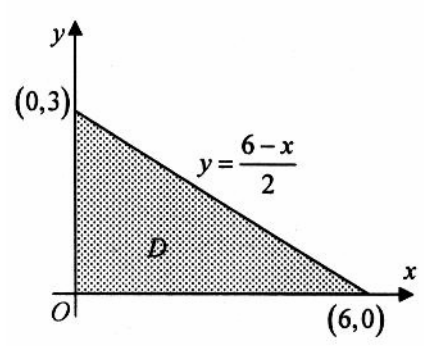


Fig. 4

Evident

$$\operatorname{Vol}(T)=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\iint\limits_D\left(\int_0^{6-x-2y}dz\right)dx\,dy=\int_0^6\left(\int_0^{3-\frac{x}{2}}(6-x-2y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^6\left(\left(6y-xy-y^2\right)\Big|_0^{3-\frac{x}{2}}\right)dx=\int_0^6\left(9-3x+\frac{x^2}{4}\right)dx=9x-3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\Bigg|_0^6=18.$$

Exemplul 5.9.2. Să se calculeze $\iiint\limits_T\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ unde T este domeniul mărginit de suprafețele $z=0$, $z=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

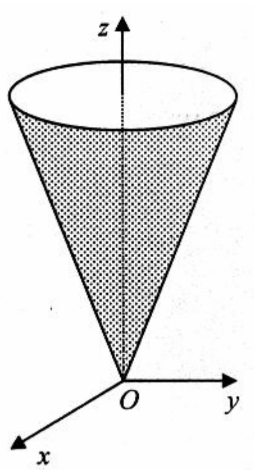


Fig. 5

Din punct de vedere geometric $z^2=x^2+y^2$ reprezintă un con cu vârful în origine. Observăm că dacă notăm cu D discul $x^2+y^2<1$, atunci

$$T=\left\{(x,y,z);\ \sqrt{x^2+y^2}<z<1,\ (x,y)\in D\right\}.$$

Avem

$$\iiint\limits_T\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz\right)=$$

$$=\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-\left(x^2+y^2\right)\right)dx\,dy=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(\rho-\rho^2\right)\rho\,d\rho=\frac{\pi}{6}.$$

În continuare prezentăm teorema schimbării de variabile în integrala triplă.

Teorema 5.9.5. *Fie Ω şi T două domenii din $\mathbb{R}^3$ şi fie $F:\overline{\Omega}\to\overline{T}$ o funcţie vectorială surjectivă, definită prin $F(u,v,w)=(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$, $\forall\ (u,v,w)\in\overline{\Omega}$.*

Presupunem că $F\in C^1(\overline{\Omega})$, $F:\Omega\to T$ este bijectivă şi că iacobianul $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0$ pe Ω. Dacă $f:\overline{T}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_\Omega f\left[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right]\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w)\right|du\,dv\,dw\,.$$

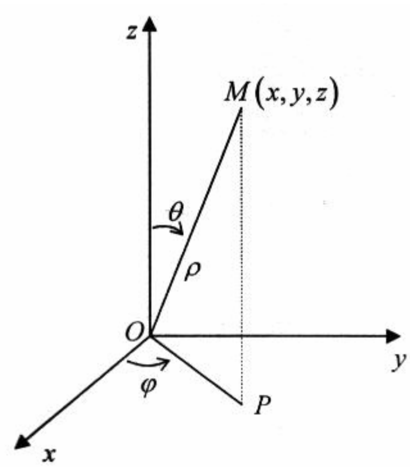


Fig. 6

Cea mai utilizată schimbare de variabile în spaţiu este trecerea la coordonate polare.

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi & 0<\rho<\infty\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi & 0<\theta<\pi\\ z=\rho\cos\theta & 0<\varphi<2\pi\end{cases}$$

Semnificaţia notaţiilor este prezentată în figura 6.

Iacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\rho^2\sin\theta\,.$$

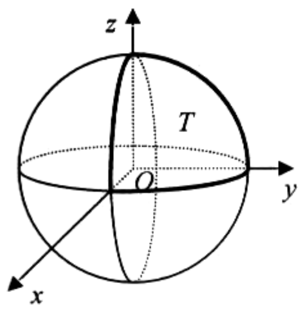
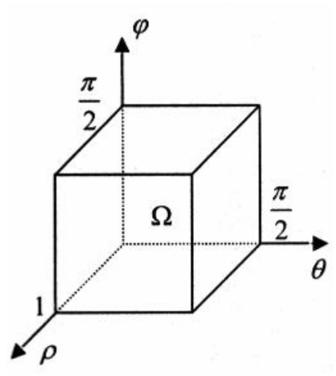


Fig. 7

Exemplul 5.9.3. Să se calculeze $\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz$, unde T este domeniul mărginit de suprafeţele $x=0$, $y=0$, $z=0$ şi $x^2+y^2+z^2=1$. Din punct de vedere geometric, domeniul T este primul octant din sfera $x^2+y^2+z^2\le 1$. Trecem la coordonate polare şi notăm cu

$$\Omega=\left\{(\rho,\theta,\varphi);\ 0<\rho<1, 0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}.$$



Observăm că între domeniile Ω şi T există o corespondență bijectivă. Din Teorema 5.9.5 rezultă:

$$\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\iiint_\Omega \rho^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^5 d\rho =$$

$$=\frac{1}{48}.$$

În încheierea acestui paragraf prezentăm câteva aplicații ale integralei triple în mecanică.

Fie $T\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit şi fie $\rho:\overline{T}\to\mathbb{R}_+$ o funcție continuă. Dacă considerăm un corp neomogen care are forma domeniului T, de densitate variabilă $\rho=\rho(x,y,z)$, atunci masa acestui corp este $M=\iiint_T \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Pentru un corp omogen, care are forma domeniului T, coordonatele centrului său de greutate G se calculează cu formulele:

$$x_G=\frac{\iiint_T x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_T dx\,dy\,dz},\quad y_G=\frac{\iiint_T y\,dx\,dy\,dz}{\iiint_T dx\,dy\,dz},\quad z_G=\frac{\iiint_T z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_T dx\,dy\,dz}.$$

Pentru un corp omogen de densitate $\rho=1$, momentele de inerție în raport cu originea O, în raport cu axa Oz, respectiv în raport cu planul xOy se calculează cu formulele:

$$I_O=\iiint_T\left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$I_{Oz}=\iiint_T\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$I_{xOy}=\iiint_T z^2\,dx\,dy\,dz\,.$$

CAPITOLUL 6

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

6.1. SUPRAFEȚE PARAMETRIZATE NETEDE

Definiția 6.1.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu (mulțime deschisă şi conexă). Se numeşte pânză parametrizată de clasă C^1, orice funcție vectorială $r : D \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1.*

Dacă notăm cu *x*, *y* şi *z* componentele scalare ale lui *r*, atunci $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $\forall$ $(u,v) \in D$. Ecuațiile $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$ se numesc ecuațiile parametrice ale pânzei *r*, sau o reprezentare parametrică a pânzei, iar *u* şi *v* se numesc parametrii pânzei. Imaginea directă a domeniului *D* prin funcția vectorială *r*, adică mulțimea $S = \{\, x(u,v), y(u,v), z(u,v);\ (u,v) \in D\}$ se numeşte suportul (sau urma) pânzei *r*.

În continuare vom folosi câteva notații specifice geometriei diferențiale. Pentru funcția $r : D \to \mathbb{R}^3$ folosim notația vectorială:
$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)k$, $(u,v) \in D$.

De asemenea, notăm cu $x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}$, $y_u = \dfrac{\partial y}{\partial u}$ etc., cu

$$A = A(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = B(u,v) = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix},$$

$$C = C(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$$

$$E = \|\vec{r}_u\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad \text{şi}$$

$$G = \|\vec{r}_v\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Observăm că:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \quad \text{şi} \quad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Dacă notăm cu φ unghiul dintre vectorii $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$, atunci

$$EG - F^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2 - (\vec{r}_u\,\vec{r}_v)^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2 (1 - \cos^2\varphi) =$$

$$=\left(\|\vec{r}_u\|^2\|\vec{r}_v\|^2\sin^2\varphi\right)=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|^2=A^2+B^2+C^2.$$

Aşadar avem:

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2 \tag{1}$$

Definiția 6.1.2. *O pânză parametrizată de clasă C^1 se numeşte netedă dacă* $A^2+B^2+C^2>0,\ \forall\ (u,v)\in D$.

Pentru o pânză parametrizată netedă rezultă că $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq 0,\ \forall\ (u,v)\in D$, deci $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sunt necoliniari. Fie $(u,v)\in D$ şi fie $M\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\in S$, punctul corespunzător de pe suportul pânzei *r*. Planul determinat de vectorii $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ şi care trece prin *M* se numeşte planul tangent în *M* la *S* şi are ecuația:

$$A\left(X-x(u,v)\right)+B\left(Y-y(u,v)\right)+C\left(Z-z(u,v)\right)=0 \tag{2}$$

Normala în punctul *M* la *S* (adică perpendiculara pe planul tangent în punctul *M* al suportului *S* al pânzei) este paralelă cu vectorul $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$. Rezultă că parametrii directori ai normalei în *M* la *S* sunt *A*, *B* şi *C*.

Definiția 6.1.3. *O pânză parametrizată $r:D\to\mathbb{R}^3$ se numeşte simplă, dacă funcția r este injectivă, adică dacă $r(u_1,v_1)\neq r(u_2,v_2)$, oricare ar fi punctele* $(u_1,v_1)\in D$, $(u_2,v_2)\in D$, $(u_1,v_1)\neq(u_2,v_2)$.

Exemplul 6.1.1 Fie pânza parametrizată de clasă C^1, definită prin: $r(u,v)=\left(R\sin u\cos v,\ R\sin u\sin v,\ R\cos u\right),\ \ (u,v)\in D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Ecuațiile parametrice sunt:

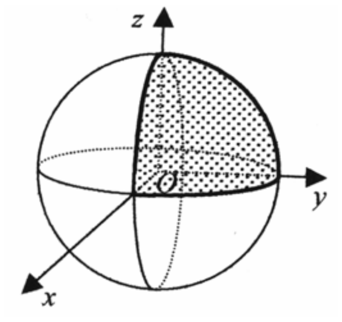


Fig. 1

$$\begin{cases} x=R\sin u\cos v\\ y=R\sin u\sin v\\ z=R\cos u \qquad (u,v)\in D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Observăm că pentru orice $(u,v)\in D$, punctul $\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$ verifică ecuația $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. Rezultă că suportul acestei pânze este porțiunea sferei cu centrul în origine şi de rază *R*, cuprinsă în primul octant. Mai departe avem:

$$x_u=R\cos u\cos v,\ y_u=R\cos u\sin v,\ z_u=-R\sin u$$

$x_v = -R\sin u \sin v,\ y_v = R\sin u\cos v,\ z_v = 0$

$A = R^2\sin^2 u\cos v\ ,\quad B = R^2\sin^2 u\sin v\ ,\quad C = R^2\sin u\cos u$

$E = R^2\ ,\quad F = 0\ ,\quad G = R^2\sin^2 u$

$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = R^4\sin^2 u > 0\ ,\quad \forall\ (u,v)\in D\ .$

De asemenea, este evident că funcţia r este injectivă pe D. Aşadar, pânza parametrizată din acest exemplu este o pânză parametrizată netedă şi simplă.

Un caz particular de pânză parametrizată, deosebit de important în aplicaţii, este cazul pânzei definită explicit. Mai precis, fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu şi fie $f : D\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Notăm cu $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi cu $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Cu ajutorul funcţiei f putem defini următoarea pânză parametrizată de clasă C^1:

$r : D\to\mathbb{R}^3\ ,\quad r(x,y) = (x,y,f(x,y))\ ,\quad \forall\ (x,y)\in D\ .$

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y)\ , \qquad (x,y)\in D. \end{cases}$$

Observăm că suportul acestei pânze este graficul funcţiei f (Fig. 2).

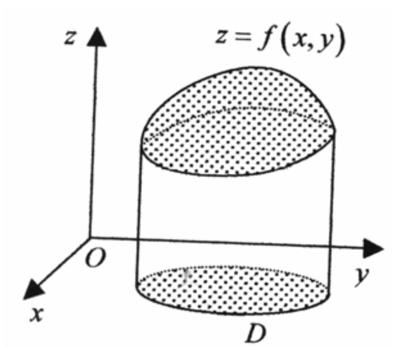


Fig. 2

Pe de altă parte, avem

$$A = \frac{D(y,z)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} = -p\ ,$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -q \quad \text{şi}$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\ .$$

Deoarece $A^2 + B^2 + C^2 = p^2 + q^2 + 1 > 0$, rezultă că pânza (3) este netedă. De aseme nea, este evident că este o pânză simplă.

Planul tangent într-un punct oarecare $M(x,y,f(x,y))$ are ecuaţia: $(X - x)(-p) + (Y - y)(-q) + Z - f(x,y) = 0$, iar parametrii directori ai normalei în M sunt $(-p,-q,1)$.

Definiţia 6.1.5. *Două pânze parametrizate de clasă* C^1, $r : D\to\mathbb{R}^3$ *şi* $r_1 : D_1\to\mathbb{R}^3$ *se numesc echivalente cu aceeaşi orientare dacă există un difeomorfism* $\Phi : D\to D_1$ *cu proprietăţile:* $\det J_\Phi(u,v) > 0$, $\forall\ (u,v)\in D$ şi $r = r_1\circ\Phi$.

Reamintim că Φ este difeomorfism, dacă Φ este bijectivă, $\Phi \in C^1(D)$ şi $\Phi^{-1} \in C^1(D_1)$

Dacă $\det J_{\Phi} < 0$ pe *D*, spunem că cele două pânze sunt echivalente cu orientări opuse. Funcția Φ se mai numeşte şi schimbare de parametri. Vom nota cu $r \sim r_1$ faptul că pânzele *r* şi r_1 sunt echivalente. Din Definiția 6.1.4 rezultă:

Observația 6.1.1 Orice două pânze echivalente au acelaşi suport.

Exemplul 6.1.2. Fie pânza parametrizată definită astfel:

$$r_1(u_1, v_1) = \left(u_1, v_1, \sqrt{R^2 - u_1^2 - v_1^2}\right),$$

$$(u_1, v_1) \in D_1 = \left\{(u_1, v_1) \in \mathbb{R}^3;\ u_1^2 + v_1^2 < R^2, u_1 > 0, v_1 > 0\right\}.$$

Observăm că pânzele din exemplele 6.1.1 şi 6.1.2 sunt echivalente cu aceeaşi orientare. Într-adevăr, fie $\Phi : D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to D_1$, definită prin:

$\Phi(u, v) = (R \sin u \cos v,\ R \sin u \sin v)$, $(u, v) \in D$. Rezultă că $\Phi \in C^1(D)$ şi $J_{\Phi}(u, v) = \begin{vmatrix} R\cos u \cos v & -R \sin u \sin v \\ R \cos u \sin v & R \sin u \cos v \end{vmatrix} = R^2 \sin u \cos u > 0$, $\forall \ (u, v) \in D$. Dacă presupunem că $\Phi(u', v') = \Phi(u'', v'')$, atunci rezultă că $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} v'$ şi mai departe că $v = v'$ şi $u = u'$. Aşadar, Φ este injectivă. Pentru a dovedi că Φ este şi surjectivă, fie $u_1 > 0$, $v_1 > 0$ cu proprietatea $u_1^2 + v_1^2 < R^2$. Deoarece $0 < \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{R} < 1$, rezultă că există $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{R} = \sin u$, relație echivalentă cu $\left(\frac{u_1}{R \sin u}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{R \sin u}\right)^2 = 1$. Atunci există $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{u_1}{R \sin u} = \cos v$ şi $\frac{v_1}{R \sin u} = \sin v$. În definitiv, am arătat că există $(u, v) \in D$ astfel încât $u_1 = R \sin u \cos v$, $v_1 = R \sin u \sin v$, deci $(u_1, v_1) = \Phi(u, v)$. De asemenea, este uşor de observat că

$$\Phi^{-1}(u_1, v_1) = \left(\arcsin \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{r}, \operatorname{arctg} \frac{v_1}{u_1}\right),\ (u_1, v_1) \in D_1, \text{ deci } \Phi^{-1} \in C^1(D_1).$$

Pe de altă parte avem:

$$(r_1 \circ \Phi)(u, v) = r_1[\Phi(u, v)] = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u) = r(u, v),$$

$\forall\ (u,v)\in D$, deci $r \sim r_1$.

Observația 6.1.2 Orice pânză parametrizată echivalentă cu o pânză parametrizată simplă sau netedă este la rândul său simplă sau netedă.

Într-adevăr, fie $r \sim r_1$ unde $r(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$, $(u,v)\in D$, $r_1(u_1,v_1)=\left(x_1(u_1,v_1),y_1(u_1,v_1),z_1(u_1,v_1)\right)$, $(u_1,v_1)\in D_1$ şi fie $\Phi : D\to D_1$, $\Phi(u,v)=\left(\lambda(u,v),\mu(u,v)\right)$, $(u,v)\in D$, schimbarea de parametri.

Deoarece $r=r_1\circ\Phi$ şi Φ este bijectivă, rezultă că dacă r_1 este injectivă (deci simplă) atunci şi *r* este injectivă (simplă). Pe de altă parte:

$x(u,v)=x_1\left[\lambda(u,v),\mu(u,v)\right]$, $y(u,v)=y_1\left[\lambda(u,v),\mu(u,v)\right]$ şi

$z(u,v)=z_1\left[\lambda(u,v),\mu(u,v)\right]$.

Ţinând seama de formulele de derivare a funcţiilor compuse de două variabile rezultă:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{D(y_1,z_1)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}=A_1\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}$$

şi analog

$$B=B_1\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)} \text{ şi } C=C_1\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}.$$

Aşadar, avem:

$A^2+B^2+C^2=\left(A_1^2+B_1^2+C_1^2\right)\left[\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right]^2$. Cum $\left[\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right]^2>0$, rezultă că dacă *r* (respectiv r_1) este netedă, atunci şi r_1 (respectiv *r*) este netedă.

Definiţia 6.1.6 *Se numeşte suprafaţă parametrizată de clasă* C^1 *orice clasă de echivalenţă de pânze parametrizate de clasă* C^1.

Aşadar, $\hat{S}$ este o suprafaţă parametrizată de clasă C^1, dacă există o pânză parametrizată de clasă C^1, $r : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, astfel încât:

$\hat{S}=\left\{r_1 : D\to\mathbb{R}^3\text{, pânză netedă parametrizată; } r\sim r_1\right\}$.

Cum $r\sim r_1$, rezultă că $r\in\hat{S}$. Suprafaţa $\hat{S}$ se numeşte simplă (respectiv netedă) dacă pânza *r* care o determină este simplă (netedă). Suportul suprafeţei $\hat{S}$, este suportul *S* al pânzei *r* care o determină, acelaşi cu suportul oricărei alte pânze de clasă $\hat{S}$. De regulă, vom identifica suprafaţa $\hat{S}$ su suportul său *S*.

6.2. ARIA UNEI SUPRAFEȚE

Pentru început abordăm problema ariei unei suprafețe nedete explicită. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit care are arie şi fie $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe $\overline{D}$. Dacă notăm cu $p=\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $q=\frac{\partial f}{\partial y}$, rezultă că p şi q sunt continue pe $\overline{D}$. Fie S (respectiv $\overline{S}$) graficul funcției $f:D\to\mathbb{R}$ (respectiv $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$). Aşadar,

$$S=\left\{(x,y,\ f(x,y));\ (x,y)\in D\right\} \text{ şi } \overline{S}=\left\{(x,y,\ f(x,y));\ (x,y)\in \overline{D}\right\}.$$

Mulțimea $\Gamma = \overline{S} \setminus S$ se numeşte bordura suprafeței S. Dacă S este frontiera domeniului D, atunci

$$\Gamma=\left\{(x,y,\ f(x,y));\ (x,y)\in C\right\}.$$

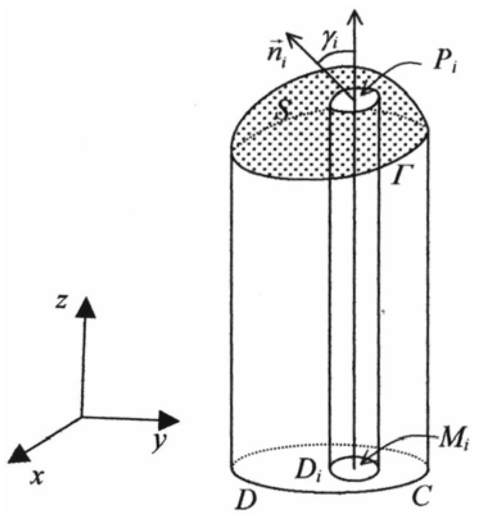


Fig. 1

Fie $\rho: D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție a domeniului D şi fie $M_i(x_i, y_i)$ un punct oarecare din D_i. Notăm cu P_i punctul corespunzător de pe suprafața S. Evident P_i are coordonatele $(x_i, y_i,\ f(x_i, y_i))$.

Fie π_i planul tangent la S în punctul P_i şi fie $\vec{n}_i$ versorul normalei la S în P_i, orientat în sus. Dacă notăm cu γ_i unghiul format de versorul $\vec{n}_i$ cu axa Oz, atunci $\cos\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}}$, unde $p_i=\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)$ şi $q_i=\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)$.

Fie T_i porțiunea decupată din planul tangent π_i de cilindrul cu generatoarele paralele cu Oz şi curba directoare C_i – frontiera domeniului D_i. Deoarece γ_i este unghiul dintre planul π_i şi planul xOy rezultă că aria D_i = $\text{aria}(T_i)\cos\gamma_i$ sau

$$\text{aria}(T_i)=\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}\cdot \text{aria}(D_i) \tag{1}$$

Prin definiție, aria S = aria $\overline{S}$ = A = $\lim\limits_{\|\rho\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\text{aria}(T_i)$. Sensul exact fiind următorul: Există $A \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $\forall\ \varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, $\forall\ \rho: D_1,\ldots,D_n$, partiție a lui D, cu $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$ şi $(\forall)\, M_i(x_i,y_i)\in D_i$, avem:

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\left(T_i\right) \right| < \varepsilon .$$

Ținând seama de (1) rezultă că $\sum_{i=1}^{n} \text{aria}\left(T_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+p_i^2+q_i^2} \cdot \text{aria}\, D_i$. Observăm că suma din membrul drept este suma Riemann atașată funcției $g = \sqrt{1+p^2+q^2}$, partiției ρ şi punctelor intermediare $M_i\left(x_i, y_i\right) \in D_i$. Cum g este continuă pe D, deci integrabilă, rezultă că:

$$\text{aria } S = \lim_{\|\rho\| \to 0} \sigma_\rho\left(g; M_i\right) = \iint_D g\left(x, y\right) dx\, dy = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\left(x, y\right) dx\, dy .$$

Aşadar, o suprafață netedă explicită $S: z = f\left(x, y\right)$, $\left(x, y\right) \in D$, are arie şi

$$\text{aria}\, S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\left(x, y\right) dx\, dy \tag{2}$$

Exemplul 6.2.1 Să se calculeze aria suprafeței

$$S: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ , \ \left(x, y\right) \in D = \left\{ \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < R^2 \right\} .$$

Rezultă:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\ , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\ ,$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} .$$

Conform (2) avem

$$\text{Aria } S = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 + p^2 + q^2}} dx\, dy = R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho =$$

$$= 2\pi R \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\Big|_0^R = 2\pi R^2 .$$

Din punct de vedere geometric $\overline{S} = \left\{ \left(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right);\ x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$ reprezintă emisfera superioară a sferei cu centrul în origini şi de rază R. Aria întregii sfere va fi $4\pi R^2$.

Definiția 6.2.1 *Fie S o suprafață parametrizată simplă şi netedă şi fie $r\left(u, v\right) = \left(x\left(u, v\right), y\left(u, v\right), z\left(u, v\right)\right)$, $\forall\ \left(u, v\right) \in D \subset \mathbb{R}^2$, o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie şi că $x, y, z \in C^1\left(\overline{D}\right)$. Notăm cu* $S = \left\{ \left(x\left(u, v\right), y\left(u, v\right), z\left(u, v\right)\right);\ \left(u, v\right) \in D \right\}$ *şi cu*

$$\overline{S} = \left\{ \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \right);\ (u,v) \in \overline{D} \right\}.$$

Deoarece suprafața este simplă, rezultă că funcția $r : D \to S$ este bijectivă. Mulțimea $\Gamma = \overline{S} \setminus S$ se numeşte bordura suprafeței *S*. Dacă notăm cu *C* frontiera domeniului *D*, atunci

$$\Gamma = r(C) = \left\{ \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \right);\ (u,v) \in C \right\}.$$

Corespondența dintre *C* şi Γ, în general nu este bijectivă . Suprafața *S* se numeşte închisă dacă $\overline{S} = S$. O suprafață parametrizată închisă nu are bordură.

Exemplul 6.2.2 Fie suprafața parametrizată

$$r(u,v) = \left(R\sin u \cos v,\ R\sin u \sin v,\ R\cos u \right),\ (u,v) \in D = (0,\pi) \times (0,2\pi).$$

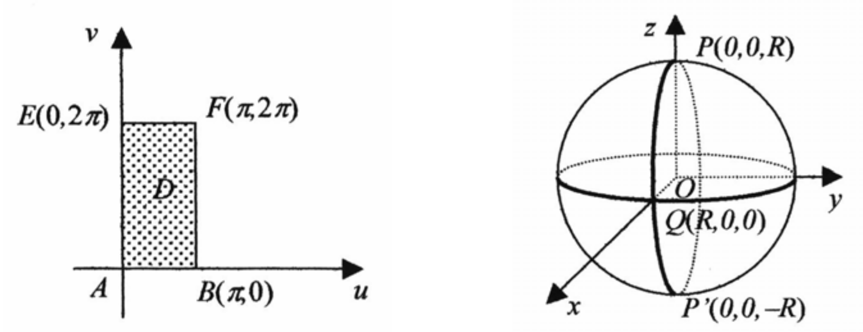


Fig. 2

Ecuațiile parametrice sunt:
$$\begin{cases} x = R\sin u \cos v & \\ y = R\sin u \sin v & u \in (0,\pi) \\ z = R\cos u & v \in (0,2\pi). \end{cases}$$

Observăm că $r(0,v) = (0,0,R)$, $\forall\ \ v \in [0,2\pi]$. Aşadar, imaginea oricărui punct de pe segmentul $\overline{AE}$, prin funcția vectorială *r*, este punctul $P(0,0,R)$. În mod analog imaginea oricărui punct de pe segmentul $\overline{BF}$ este punctul $P'(0,0,-R)$.

Pe de altă parte, imaginea oricărui punct $M \in \overline{AB} \cup \overline{EF}$ va fi un punct de coordonate $x = R\sin u$, $y = 0$, $z = R\cos u$, $u \in [0,\pi]$.

Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ şi $x \geq 0$ rezultă că imaginea frontierei domeniului *D* prin funcția vectorială *r* este meridianul $\overset{\frown}{PQP'}$ de pe sfera cu centrul în origine şi de rază *R*. Aşadar, $S = r(D)$ este sfera cu centrul în origine şi de rază *R* mai puțin meridianul $\overset{\frown}{PQP'}$.

$\overline{S} = r(\overline{D})$ este sfera cu centrul în origine şi de rază R. Bordura suprafeţei S este $\Gamma = \overline{S} \setminus S = \overset{\frown}{PQP'}$.

Definiţia 6.2.2 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit care are arie şi fie* $r : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in \overline{D}$.

Presupun că $r \in C^1(\overline{D})$ şi $r : D \to \mathbb{R}^3$ este injectivă. Fie $S = r(D)$ şi $\overline{S} = r(\overline{D})$. Prin definiţie

$$\text{aria } S = \text{aria } \overline{S} = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv \tag{3}$$

Observaţia 6.2.1 Fie S o suprafaţă netedă explicită: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(\overline{D})$. În acest caz $A = -p, B = -q, C = 1$ şi din Definiţia 6.2.2 rezultă că: aria $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$.

Aşadar, în acest caz particular, regăsim formula (2) de calcul a ariei unei suprafeţe. Rezultă că Definiţia 6.2.2 este generalizarea, pentru suprafeţe parametrizate, a noţiunii de arie a unei suprafeţe explicite.

Observaţia 6.2.2 Aria unei suprafeţe parametrizate nu depinde de parametrizarea aleasă.

Într-adevăr, fie S o suprafaţă parametrizată simplă şi netedă şi fie $r : D \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$, o reprezentare parametrizată a sa. Dacă $r_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$, $r_1(u_1,v_1) = (x_1(u_1,v_1), y_1(u_1,v_1), z_1(u_1,v_1))$, $(u_1,v_1) \in D_1$ este o altă reprezentare parametrică echivalentă a lui S, atunci există un difeomorfism $\Phi : D \to D_1$, $\Phi(u,v) = (\lambda(u,v),,(u,v))$, $\forall\ (u,v) \in D$ şi avem

$$A^2 + B^2 + C^2 = \left(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2\right)\left(\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right)^2.$$

Dacă în formula (3) facem schimbarea de variabile $u_1 = \lambda(u,v)$, $v_1 = \mu(u,v)$ obţinem

$$\text{aria } S = \int_{D_1} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\, du_1\, dv_1 = \int_D \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right|^{-1} \cdot \left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right| du\, dv =$$

$$= \int_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

Exemplul 6.2.3 Să se calculeze aria suprafeței parametrizate

$$S: x = R\sin u\cos v\,,\ y = R\sin u\sin v\,,\ z = R\cos u\,,\ (x,v)\in D = \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Aşa cum s-a arătat în exemplul 6.1.1, în acest caz

$A^2+B^2+C^2 = EG-F^2 = R^4\sin^2 u$, deci

$$\text{Aria } S = \iint_D R^2\sin u\,du\,dv = R^2\int_0^{\pi/2}dv\int_0^{\pi/2}\sin u\,du = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Din punct de vedere geometric suprafața S este porțiunea din primul octant a sferei, cu centrul în origine şi de rază R. Aria întregii sfere va fi egală cu

$$8\cdot\frac{\pi R^2}{2} = 4\pi R^2.$$

Exemplul 6.2.4 Să se calculeze aria torului.

Considerăm în planul xOy un cerc de rază a cu centrul în punctul $(b,0)$ unde $0 < a < b$. Torul este suprafața T care se obține când rotim acest cerc, ca un corp rigid, în spațiu în jurul axei Oy. Dacă θ este unghiul din figura 2 şi φ este unghiul de rotire al cercului în jurul axei Oy, atunci ecuațiile parametrice ale torului sunt:

$$T:\begin{cases} x = (b+a\cos\theta)\cos\varphi \\ y = a\sin\theta \\ z = (b+a\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}\qquad (\theta,\varphi)\in D = (0,2\pi)\times(0,2\pi).$$

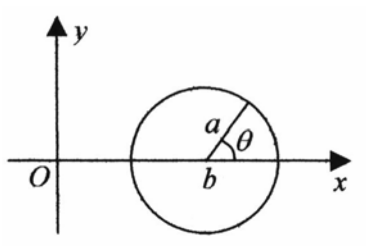


Fig. 2

Rezultă:

$x_\theta = -a\sin\theta\cos\varphi \qquad y_\theta = a\cos\theta$

$z_\theta = -a\sin\theta\sin\varphi$

$x_\varphi = -(b+a\cos\theta)\sin\varphi \qquad y_\varphi = 0$

$z_\varphi = (b+a\cos\theta)\cos\varphi$

$E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = a^2$;

$F = x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = 0$;

$G = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = (b+a\cos\theta)^2$

$EG-F^2 = a^2(b+a\cos\theta)^2$.

$$\text{Aria } T = \iint_D a(b+a\cos\theta)\,d\theta\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}(b+a\cos\theta)\,d\theta = 4\pi^2 ab.$$

Aşadar, aria torului este $4\pi^2 ab$. În cazul particular când $a = b$ reobținem aria sferei.

6.3. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMA SPEȚĂ

Fie S o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie $r(u, v) = \left(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\right)$, $(u,v) \in D$ o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie și că $x, y, z \in C^1(\overline{D})$. Fie de asemenea, F o funcție reală definită pe $\overline{S} = r(\overline{D})$ și fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție a lui D. Notăm cu $\overline{S_i} = r(\overline{D_i})$ și cu $P_i(x_i, y_i, z_i)$ un punct oarecare din $\overline{S_i}$.

Definiția 6.3.1 *Se numește integrala de suprafață de prima speță a funcției F pe suprafața S și se notează cu* $\iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ *următoarea limită*

$\lim\limits_{\|\rho\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\, S_i$, *dacă această limită există și e finită.*

(Sensul exact al existenței acestei limite fiind următorul: există $L \in$ P astfel încât $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi partiția ρ a lui D cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ și oricare ar fi punctele $P_i \in \overline{S_i}$ avem $\left| L - \sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\, S_i \right| < \varepsilon$.

Observația 6.3.1 Dacă S este o „suprafață materială" neomogenă, a cărei densitate variabilă este descrisă de funcția $F : \overline{S} \to \mathbb{R}_+$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\, S_i$ aproximează masa suprafeței S, iar $\lim\limits_{\|\rho\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\, S_i = \mathrm{masa}(S)$. Așadar, $\iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ reprezintă masa suprafeței materiale S a cărei densitate variabilă este dată de funcția $F : \overline{S} \to \mathbb{R}_+$.

Teorema 6.3.1 *Fie S o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie* $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$ *o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie și că* $x, y, z \in C^1(\overline{D})$. *dacă* $F : \overline{S} \to \mathbb{R}$ *este continuă, atunci există integrala de suprafață de prima speță a funcției F pe suprafața S și*

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S F\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right]\sqrt{EG - F^2}\,(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (1)$$

Demonstrație.

Fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție oarecare a domeniului D. O astfel de partiție determină o partiție a suprafeței S (mai exact a suprafeței lui S) şi anume: $S_1, S_2, \ldots, S_n$ unde $S_i = r(D_i)$. Fie $P_i(x_i, y_i, z_i)$ un punct oarecare din $\overline{S_i} = r(\overline{D_i})$ şi fie $\pi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i) \text{aria} S_i$. Dacă ținem seama de modul de calcul al ariei unei suprafețe (Definiția 6.2.2), rezultă că $\pi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) \iint\limits_{D_i} \sqrt{EG - F^2}(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$.

Pe de altă parte, din teorema de medie a integralei duble, rezultă că există $(\alpha_i, \beta_i) \in \overline{D_i}$ astfel încât

$$\iint\limits_{D_i} \sqrt{EG - F^2}(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i) \text{aria}(D_i).$$

Fie, de asemenea $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{D_i}$ cu proprietatea că $x_i = x(\xi_i, \eta_i)$, $y_i = y(\xi_i, \eta_i)$ şi $z_i = z(\xi_i, \eta_i)$. Cu aceste precizări rezultă că:

$$\pi_n = \sum_{i=1}^{n} F\left[x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)\right] \sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i) \text{aria}(D_i).$$

Dacă notăm cu $G(u,v) = F\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right] \sqrt{EG - F^2}(u,v)$, $\forall (u,v) \in \overline{D}$, atunci suma Riemann corespunzătoare partiției ρ, funcției G şi punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{D_i}$ este

$$\sigma_\rho(G, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} F\left[x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)\right] \sqrt{EG - F^2}(\xi_i, \eta_i) \text{aria}(D_i).$$

Deoarece G este continuă pe $\overline{D}$, deci integrabilă pe $\overline{D}$, rezultă că există

$$\lim_{\|\rho\| \to 0} \sigma_\rho(G; \xi, \eta) = \iint\limits_{D} G(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \tag{2}$$

Cum F este continuă pe $\overline{S} = r(\overline{D})$ şi $\overline{S}$ este o mulțime compactă (fiind imaginea mulțimii compacte $\overline{D}$ prin funcția continuă r), rezultă că F este mărginită pe $\overline{S}$. Fie $M > 0$ astfel încât $|F(x,y,z)| < M$, $\forall$ $(x,y,z) \in \overline{S}$.

În continuare avem:

$$\left|\pi_n - \sigma_\rho(G; \xi, \eta)\right| \le M \sum_{i=1}^{n} \left|\sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i) - \sqrt{EG - F^2}(\xi_i, \eta_i)\right| \text{aria}(D_i).$$

Pe de altă parte, funcția $\sqrt{EG - F^2}$ fiind continuă pe mulțimea compactă $\overline{D}$, este uniform continuă, deci $\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi

punctele (u',v') şi (u'',v'') din $\overline{D}$ astfel încât $|u'-v'|<\delta_\varepsilon$, $|u''-v''|<\delta_\varepsilon$, rezultă că

$$\left|\sqrt{EG-F^2}\,(u',v')-\sqrt{EG-F^2}\,(u'',v'')\right|<\frac{\varepsilon}{M\cdot \text{aria}(D)} \tag{3}$$

Dacă presupunem acum că $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$, atunci $|\alpha_i-\xi_i|\le \text{diam}(D_i)<\delta_\varepsilon$, $|\beta_i-\eta_i|\le \text{diam}(D_i)<\delta_\varepsilon$, deci

$$|\pi_n-\sigma_\rho(G;\xi,\eta)|<M\frac{\varepsilon}{M\,\text{aria}(D)}\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i)=\varepsilon \tag{4}$$

Din (2) şi (4) rezultă că există

$$\lim_{\|\rho\|\to 0}\pi_n=\lim_{\|\rho\|\to 0}\sigma_\rho(G;\xi,\eta)=\iint_D F\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\sqrt{EG-F^2}\,(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Exemplul 6.3.1 Să se calculeze $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}\sigma$ unde $S: x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>0$. Suprafaţa S reprezintă emisfera superioară a sferei cu centrul în origine şi de rază a. O reprezentare parametrică a acestei suprafeţe este: $x=a\sin u\cos v$, $y=a\sin u\sin v$, $z=a\cos u$, $(u,v)\in D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi)$ (Vezi Exemplul 6.1.1).

Ţinând seama că $EG-F^2=a^4\sin^2 u$, din Teorema 6.3.1 rezultă:

$$\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}\sigma=\iint_D (a\sin u\cos v+a\sin u\sin v+a\cos u)a^2\sin u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$=a^3\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 u\cos v+\sin^2 u\sin v+\sin u\cos u\right)\mathrm{d}v=$$

$$=a^3\left(\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 u\sin v\Big|_0^{2\pi}-\sin^2 u\cos v\Big|_0^{2\pi}+v\sin u\ \cos u\Big|_0^{2\pi}\right)\right)\mathrm{d}u=$$

$$=2\pi a^3\frac{\sin^2 u}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=\pi a^3.$$

Corolarul 6.3.1 *Fie $S: z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ o suprafaţă netedă explicită, unde D este un domeniu mărginit care are arie, iar $f\in C^1(\overline{D})$. Dacă $F:\overline{S}\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci:*

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=\iint_D F\left[x,y,f(x,y)\right]\sqrt{1+p^2+q^2}\,(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

Afirmaţia rezultă din Teorema 6.3.1 şi din observaţia că o reprezentare parametrică a suprafeţei S este: $x=x,\ y=y,\ z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$.

Exemplul 6.3.2 Să se calculeze $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma$, unde S este porțiunea din conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$, decupată de cilindrul $x^2+y^2=2y$.

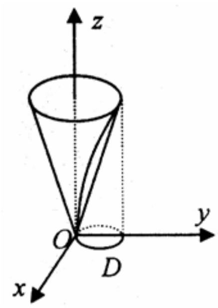


Fig. 1

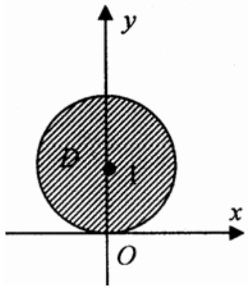


Fig. 2

Observăm că proiecția suprafeței S în planul xOy este domeniul $D: x^2+y^2-2y\le 0$. Aşadar, $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D$.

În continuare avem $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi $1+p^2+q^2=2$. Din corolarul 6.3.1 rezultă că: $I=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \left[xy+(y+x)\sqrt{x^2+y^2}\right]\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Trecând la coordonate polare: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, $0\le\rho\le 2\sin\theta$, obținem:

$$I=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\left(\rho^2\sin\theta\cos\theta+\rho^2\sin\theta+\rho^2\cos\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\sin\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left(\sin^5\theta\cos\theta+\sin^5\theta+\sin^4\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

Observația 6.3.2 Dacă suprafața S este netedă pe porțiuni, adică este o reuniune finită de suprafețe simple netede, $\overline{S}=\bigcup\limits_{i=1}^{\rho}\overline{S_i}$ cu proprietățile: S_i este simplă şi netedă $\forall\ i=\overline{1,\rho}$, două câte două nu au puncte interioare comune ($S_i\cap S_j=\varnothing$ dacă $i\ne j$) şi pentru orice i şi j $\Gamma_{ij}=\overline{S_i}\cap\overline{S_j}$ este o curbă netedă pe porțiuni (în cazul când este nevidă), atunci

$$\operatorname{aria} S=\sum_{i=1}^{\rho}\operatorname{aria} S_i \quad \text{şi} \quad \iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\sum_{i=1}^{\rho}\iint\limits_{S} F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma .$$

6.4. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ DE SPEȚA A DOUA

Pentru a defini integrala de suprafață de speța a doua, trebuie mai întâi să definim orientarea unei suprafețe, problemă asemănătoare cu orientarea unei curbe.

Fie S o suprafață parametrizată netedă şi fie $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, $(u,v)\in D$ o reprezentare parametrică a sa. În scriere vectorială,

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\overline{j}+z(u,v)\overline{k}\ ,\ (u,v)\in D.$$

Deoarece suprafața S este netedă, rezultă că $\overline{r_u}\times\overline{r_v}\neq\vec{0}$, pentru orice $(u,v)\in D$. În fiecare punct $M\in S$, de coordonate $M\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]$ există doi versori normali la suprafața S (ortogonali pe planul tangent în punctul M la suprafața S) şi anume $\pm\vec{n}(M)$ unde $\vec{n}(M)=\dfrac{\overline{r_u}\times\overline{r_v}}{\left\|\overline{r_u}\times\overline{r_v}\right\|}$.

Definiția 6.4.1 *Suprafața S se numeşte orientabilă (sau cu două fețe) dacă aplicația* $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ este continuă.

Este evident că dacă aplicația $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ este continuă, atunci şi aplicația $M\to-\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ este continuă. Dacă o suprafață este orientabilă, atunci orientarea sa (sau desemnarea unei fețe a acestei suprafețe) revine la alegerea uneia din cele două aplicații continue $M\to\pm\vec{n}(M)$. Aşadar, avem două orientări posibile ale suprafeței S (sau două fețe ale suprafeței S) şi anume: $S_+=(S,\vec{n})$ care corespunde aplicației continue $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ şi $S_-=(S,\vec{n})$ care corespunde aplicației continue $M\to-\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$. Desigur, notația S_+ pentru fața $(S,\vec{n})$ este arbitrară. Putem foarte bine să notăm cu $S_+=(S,-\vec{n})$. Important este faptul că, odată ales un anumit sens al normalei pentru a desemna o față a suprafeței, cealaltă față va corespunde sensului opus al normalei. O suprafață neorientabilă se mai numeşte şi suprafață cu o singură față.

Observația 6.4.1 Proprietatea aplicației $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ de a fi continuă, în cazul unei suprafețe orientabile, este o proprietate globală şi se referă la întreaga suprafață S. Aceasta presupune de pildă următoarea proprietate: fie $M_0\in S$ oarecare fixat şi fie C o curbă închisă pe suprafața S care trece prin M_0 şi care nu întâlneşte bordura suprafeței S. Să presupunem că am ales un sens pe normala în M_0 la S şi anume sensul versorului $\vec{n}(M_0)$. Deplasând versorul $\vec{n}(M)$ pe curba C, plecând din M_0, revenim în punctul M_0 cu aceeaşi orientare a normalei, adică

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in C}} \vec{n}(M) = \vec{n}(M_0).$$

Exemple.

1. Orice suprafață netedă explicită, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ are două fețe şi anume: fața superioară, care corespunde normalei orientată în sus (care face un unghi ascuțit cu direcția pozitivă a axei *Oz*) şi fața inferioară care corespunde normalei orientată în jos.

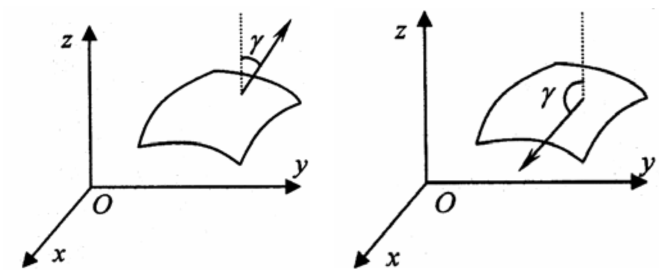


Fig. 1

2. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ are două fețe şi anume: fața exterioară care corespunde normalei orientată spre exterior şi fața interioară care corespunde normalei orientată spre interior.

Într-adevăr, pentru orice punct $M(x,y,z)$ de pe sferă, versorul normalei exterioare în punctul *M* al sferei este: $\vec{n}(M) = \frac{1}{R}\overline{OM}$.

Este uşor de arătat că aplicația $M \to \vec{n}(M) : S \to \mathbb{R}^3$ este continuă pe $S = \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$.

3. Fie *S* o suprafață parametrizată netedă şi fie $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k}$, $(u,v) \in D$ o reprezentare parametrică a sa.

Presupunem în plus că *r* : *D* → *S* este homeomorfism, adică *r* este bijectivă şi bicontinuă (*r* şi r^{-1} sunt continue). Atunci *S* = *r*(*D*) este o suprafață orientabilă. Într-adevăr, aplicația $M \to \vec{n}(M) : S \to \mathbb{R}^3$, unde $\vec{n}(M) = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\left\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\right\|}$ este continuă pe *S*, pentru că este compunerea funcțiilor continue $r^{-1} : S \to D$ şi

$$(u,v) \to \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\left\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\right\|} : D \to \mathbb{R}^3 .$$

4. Un exemplu clasic de suprafață cu o singură față (neorientabilă) este așa-numita banda lui Möbius. Un model al acestei suprafețe se obține dacă răsucim o bucată de hârtie dreptunghiulară *ABCD* astfel încât punctul *A* să coincidă cu *C*, iar punctul *B* cu *D*.

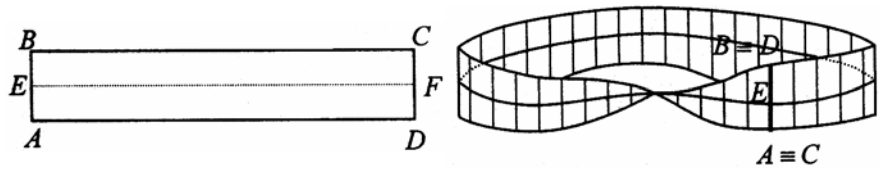


Fig. 2

Este ușor de observat că dacă deplasăm versorul normalei la suprafață plecând din *E*, pe curba închisă de pe suprafață corespunzătoare liniei mediane *EF*, când revenim în *E*, orientarea versorului normalei va fi opusă orientării inițiale a acestuia. Așadar, nu este asigurată continuitatea globală a aplicației
$M \to \vec{n}(M): S \to \mathbb{R}^3$, deci suprafața nu este orientabilă.

Definiția 6.4.2 *Fie S o suprafață parametrizată simplă, netedă, orientabilă și fie* $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, $(u,v) \in D$ *o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie și că* $x, y, z \in C^1(\overline{D})$. *Fie de asemenea* $\vec{v}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ *o funcție vectorială continuă definită prin* $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\forall\ (x,y,z) \in \Omega$, *unde* $\Omega \in \mathbb{R}^3$ *este un domeniu ce conține suprafața S. Dacă notăm cu* $S_+ = (S, \vec{n})$ *unde*
$\vec{n} = \dfrac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\left\| \overline{r}_u \times \overline{r}_v \right\|}$, *atunci integrala de suprafață de speța a doua a funcției* $\vec{v}$ *pe fața* S_+ *a suprafeței S, se definește astfel:*

$$\begin{aligned}&\iint_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma = \\ &= \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma \right] \mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{1}$$

unde α, β, γ sunt unghiurile pe care le face versorul $\vec{n}$ al normalei la suprafață cu direcțiile pozitive ale axelor de coordonate. Așadar: $\vec{n}(x,y,z) = \cos\alpha(x,y,z)\vec{i} + {}$ $+ \cos\beta(x,y,z)\vec{j} + \cos\gamma(x,y,z)\vec{k}$, $\forall\ (x,y,z) \in S$. Dacă $S_- = (S, -\vec{n})$ este cealaltă față a suprafeței *S*, atunci:

$$\iint_{S_-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S \vec{v} \cdot (-\vec{n})\, \mathrm{d}\sigma = -\iint_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy\,.$$

Observația 6.4.2 Din punct de vedere fizic, integrala de suprafață de speța a doua reprezintă fluxul câmpului de vectori $\vec{v}$ prin fața S_+ (respectiv S_-) a suprafeței *S*. Mai precis, să presupunem că $\vec{v}$ reprezintă câmpul vitezelor particulelor unui fluid în curgere staționară, adică oricare ar fi $M \in \Omega$, $\vec{v}(M)$ coincide cu viteza particulei de fluid care trece prin *M*, viteză care depinde de punctul *M*, dar nu depinde de timp. Atunci $\iint\limits_{S_+} \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma$ reprezintă volumul fluidului care trece în unitatea de timp prin suprafața *S* în direcția versorului $\vec{n}$, ce definește fața S_+ a suprafeței *S*. Dacă notăm cu $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ și $C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, atunci *A*, *B*, *C* sunt parametrii directori ai normalei la suprafață și $\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Alegerea semnului "+" sau "–" în fața radientului se face în funcție de orientarea normalei la suprafață.

Ținând seama de modul de calcul al integralei de suprafață de prima speță rezultă:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{S_+} P dy\, dz + Q dz\, dx + R dx\, dy = \pm \iint\limits_{D} \Big\{ P\big[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big] A(u,v) + \\ &+ Q\big[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big] B(u,v) + R\big[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big] C(u,v) \Big\} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{2}$$

Exemplul 6.4.1 Să se calculeze $\iint\limits_{S_+} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, unde S_+ este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 + R^2$. Ecuațiile parametrice ale sferei sunt:

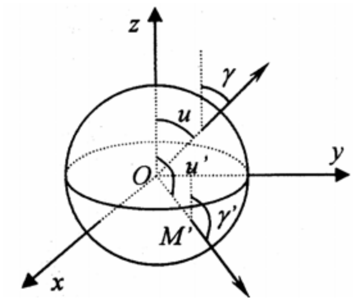
$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \qquad u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi]. \\ z = R \cos u \end{cases}$$

$A = R^2 \sin^2 u \cos v$, $B = R^2 \sin^2 u \sin v$, $C = R^2 \sin^2 u \cos u$ și

$A^2 + B^2 + C^2 = R^4 \sin^2 u$

$$\cos\alpha = \pm \sin u \cos v,\quad \cos\beta = \pm \sin u \sin v,\quad \cos\gamma = \pm\cos u \tag{3}$$

Observăm că pentru normala orientată spre exterior trebuie să alegem semnul "+" în formulele (3). Într-adevăr, dacă $u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ punctul corespunzător *M* de pe sferă se află pe emisfera superioară și normala exterioară va face un unghi ascuțit cu axa *Oz* ($\cos\gamma = \cos u > 0$).



Dacă $u \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, punctul corespunzător M de pe sferă se află pe emisfera inferioară şi normala orientată spre exterior va face un unghi optuz cu axa Oz ($\cos\gamma = \cos u < 0$).

Din formula de calcul (2) rezultă:

$$\iint_{S_+} x dy\, dz + y dz\, dx + z dx\, dy =$$

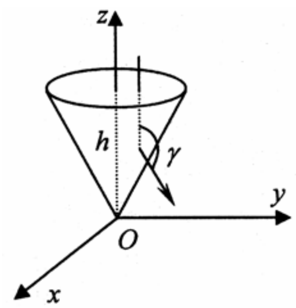
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^{\pi} \left(R^3 \sin^3 u \cos^2 v + R^3 \sin^3 u \sin^2 v + R^3 \sin u \cos^2 u\right) \mathrm{d}u =$$

$$= R^3 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin u\, du = 4\pi R^3 .$$

În cazul unei suprafeţe netede explicită $z = f(x,y), (x,y) \in D$, avem $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$, unde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} .$$

Dacă S_+ este faţa superioară a suprafeţei, corespunzătoare normalei orientate în sus, atunci $\cos\gamma > 0$ şi vom alege semnul "+" în faţa radicalului. Pentru faţa inferioară S_-, $\cos\gamma < 0$ şi alegem semnul "–" în faţa radicalului.



Exemplul 6.4.2 Să se calculeze $\iint_{S_-} (y-z) dy\, dz + (z-x) dz\, dx + (x-y) dx\, dy$, unde S_- este faţa inferioară a conului $x^2 + y^2 = z^2 : 0 \le z \le h$. Aşadar avem:

$S : z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$, unde

$D = \left\{(x,y) \middle| x^2+y^2 \le h^2\right\}$, $p = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$q = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $1 + p^2 + q^2 = 2$. Deoarece $\cos\gamma < 0$, rezultă că $\cos\gamma = \dfrac{1}{-\sqrt{2}}$,

$\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$ şi $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\iint_{S_-} (y-z) dy\, dz + (z-x) dz\, dx + (x-y) dx\, dy =$$

$$= \iint_S \left[(y-z)\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} + (z-x)\frac{y}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} + (x-y)\frac{1}{-\sqrt{2}} \right] \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_D \left[\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\frac{y}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right] \sqrt{2}\, dx\, dy =$$

$$= 2\iint_D (y-x)\,dx\,dy = 2\int_0^h (\sin\theta - \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 .$$

6.5. FORMULE INTEGRALE

O primă formulă integrală a fost deja prezentată în Capitolul 5, §5.7 şi anume formula lui Green, care stabileşte legătura între integrala dublă pe un domeniu şi integrala curbilinie de speța a doua pe frontiera acestui domeniu. În cele ce urmează prezentăm alte două formule: formula Gauss-Ostrogradski, care stabileşte legătura între integrala triplă şi integrala de suprafață şi formula Stokes care stabileşte legătura între integrala curbilinie şi integrala de suprafață.

Teorema 6.5.1 (Gauss-Ostrogradski)

Fie $T \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu simplu în raport cu cele trei axe de coordonate şi fie P, Q, R trei funcții reale continue, împreună cu derivatele lor* $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ *pe* $\overline{T}$. *Presupunem de asemenea că* $S = \overline{T} \setminus T$ *(frontiera lui T) este o suprafață netedă pe porțiuni. Atunci:*

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \iint_{S_e} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy ,$$

unde cu S_e am notat fața exterioară a suprafeței *S*.

Demonstrație. Deoarece domeniul $T \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa *Oz*, rezultă că există un domeniu mărginit $D \subset \mathbb{R}^3$, care are arie şi două funcții reale, conține pe $\overline{D}$ proprietatea că $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$, $\forall\ (x,y) \in D$ astfel încât

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \varphi(x,y) < z < \psi(x,y), \forall (x,y) \in D \right\}.$$

Notăm cu S_1 graficul funcției $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, cu S_2 graficul funcției $z = \psi(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$ şi cu S_3 suprafața cilindrică laterală, cu generatoarele paralele cu axa *Oz*. Observăm că suprafața $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ este frontiera domeniului *T*. Ipoteza că *S* este netedă pe porțiuni înseamnă că $\varphi, \psi \in C^1\left(\overline{D}\right)$.

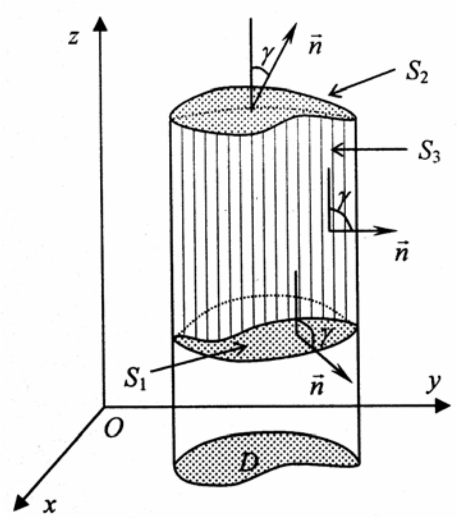


Fig. 1

Fața exterioară a suprafeței S înseamnă fața corespunzătoare normalei orientate spre exterior. Aceasta înseamnă pentru suprafața S_1, fața inferioară, iar pentru suprafața S_2, fața superioară. Așadar

$$S_e = (S_1)_- \cup (S_2)_+ \cup (S_3)_e .$$

Deoarece pentru fața inferioară a suprafeței S_1, unghiul γ format de normala orientată în jos, cu axa Oz, este optuz, rezultă că $\cos\gamma < 0$, deci

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}} .$$

Mai departe avem:

$$\iint_{(S_1)_-} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_{S_1} R(x,y,z)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\,d\sigma =$$

$$= \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_D R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dx\,dy \tag{1}$$

În mod analog, pentru fața superioară a suprafeței S_2, $\cos\gamma > 0$, deci

$$\iint_{(S_2)_+} R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D R\left[x,y,\psi(x,y)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D R\left[x,y,\psi(x,y)\right]dx\,dy . \tag{2}$$

Pentru fața exterioară a suprafeței cilindrice laterale, $\cos\gamma = 0$, deoarece unghiul $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că:

$$\iint\limits_{(S_3)_e} R(x,y,z)dx\,dy = \iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = 0 \tag{3}$$

Aşadar avem:

$$\iint\limits_{S_e} R(x,y,z)dx\,dy = \iint\limits_{(S_1)_-} R(x,y,z)dx\,dy + \iint\limits_{(S_2)_+} R(x,y,z)dx\,dy + \iint\limits_{(S_3)_e} R(x,y,z)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D R\left[x,y,\psi(x,y)\right]dx\,dy - \iint\limits_D R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dx\,dy \tag{4}$$

Pe de altă parte, din modul de calcul al integralei triple rezultă:

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dx\,dy = \iint\limits_D R(x,y,z)\Bigg|_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D R\left[x,y,\psi(x,y)\right]dx\,dy - \iint\limits_D R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dx\,dy \tag{5}$$

Din (4) şi (5) deducem:

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_e} R(x,y,z)dx\,dy \tag{6}$$

În mod analog, folosind faptul că domeniul T este simplu şi în raport cu axele Oy şi Ox deducem:

$$\iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y}dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_e} Q(x,y,z)dz\,dx \tag{7}$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_e} P(x,y,z)dx\,dy \tag{8}$$

În sfârşit, adunând relațiile (6), (7) şi (8) obținem formula Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_e} P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dz\,dx + R(x,y,z)dx\,dy \tag{9}$$

Observația 6.5.1 Printre exemplele de domenii simple în raport cu cele 3 axe de coordonate amintim: sfera, elipsoidul, paralelipipedul dreptunghic cu muchiile paralele cu axele etc. Fără a intra în detalii, menționăm că formula Gauss-Ostrogradski rămâne valabilă şi pentru domenii care sunt reuniuni finite de domenii simple în raport cu cele 3 axe de coordonate, două câte două, dintre acestea având în comun cel mult suprafețe netede pe porțiuni. Scriind formula Gauss-Ostrogradski pentru fiecare din domeniile simple T_i, care alcătuiesc domeniul T, adunând aceste formule şi folosind proprietatea de aditivitate a integralei triple şi a integralei de suprafață, se obține formula Gauss-Ostrogradski pentru domeniul T. Acest lucru se explică prin faptul că integrala de suprafață, pe o suprafață de intersecție a două domenii simple vecine, apare în suma din membrul

drept de două ori, o dată pe fața superioară şi o dată pe fața inferioară, deci contribuția ei în membrul drept este nulă. În felul acesta, în membrul drept rămâne numai integrala pe fața exterioară a domeniului T.

Observația 6.5.2 Ținând seama de legătura dintre integrala de suprafață de speța a doua şi de integrala de suprafață de speța întâi, formula Gauss-Ostrogradski se mai scrie:

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma \tag{10}$$

unde α,β,γ sunt unghiurile pe care le face normala exterioară la suprafața S cu Ox, Oy şi Oz.

Dacă notăm cu $\vec{V}$ câmpul vectorial de componente P, Q, R, atunci $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ şi $\mathrm{div}\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$. Fie de asemenea, $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ versorul normalei exterioare la suprafața S. Cu aceste precizări, formula Gauss-Ostrogradski devine:

$$\iiint_T \mathrm{div}\vec{V}\,dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{11}$$

Sub această formă, formula Gauss-Ostrogradski se mai numeşte şi formula flux-divergență.

Exemplul 6.5.1 Folosind formula Gauss-Ostrogradski să se calculeze $\iint_{S_e} x^2dy\,dz + y^2dz\,dx + z^2dx\,dy$, unde S_e este fața exterioară a cubului $T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a\right\}$. Notând cu $P(x,y,z) = x^2$, $Q(x,y,z) = y^2$ şi $R(x,y,z) = z^2$, din formula Gauss-Ostrogradski deducem:

$$\iint_{S_e} x^2dy\,dz + y^2dz\,dx + z^2dx\,dy = \iiint_T (2x+2y+2z)dx\,dy\,dz =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz = 2\int_0^a dx\int_0^a \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^a dy =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2}\right)dy = 2\int_0^a \left(axy + a\frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2}y\right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= 2\int_0^a \left(a^2x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2}\right)dx = 2\left(a^2\frac{x^2}{2} + a^3x\right)\Bigg|_0^a = 3a^4 .$$

Teorema 6.5.2 (Stokes)

Fie S o suprafață netedă explicită: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, *unde D este un domeniu mărginit a cărui frontieră* γ *este o curbă netedă. Presupunem că* $f \in C^2(\overline{D})$ *şi P, Q, R sunt trei funcții de clasă* C^1 *pe un domeniu* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *care include suprafața* $\overline{S}$. *Dacă notăm cu* $\Gamma = \overline{S} \setminus S = \{(x,y,f(x,y)); (x,y) \in \gamma\}$ *bordura suprafeței S, atunci avem:*

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S_+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

(Între sensul de parcurgere al curbei Γ şi fața suprafeței pe care se face integrala din membrul drept, există următoarea legătură de compatibilitate*) : dacă curba Γ este parcursă în sens trigonometric (respectiv sensul acelor unui ceasornic), atunci integrala din membrul drept se face pe fața superioară (respectiv inferioară) a suprafeței *S*).

Demonstrație. Fie $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a,b]$ o reprezentare parametrică a curbei γ. Atunci $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, $z = f[\varphi(t),\psi(t)]$, $t \in [a,b]$ este o reprezentare parametrică a curbei Γ-bordura suprafeței *S*.

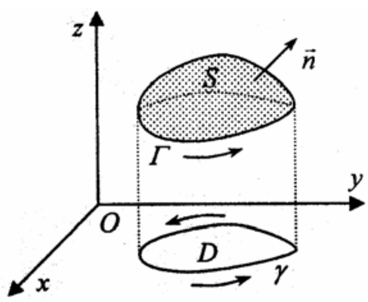


Fig. 2

Ținând seama de modul de calcul al integralei duble de speța a doua avem:

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx =$$

$$= \int_0^a p[\varphi(t),\psi(t), f(\varphi(t),\psi(t))]\varphi'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \oint_{\gamma} P[x,y,f(x,y)]dx\,. \tag{12}$$

În continuare, din formula lui Green rezultă:

$$\oint_{\gamma} P[x,y,f(x,y)]dx = -\iint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{13}$$

Dacă notăm $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi cu $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, mai departe avem:

*) În ipoteza că sistemul de coordonate este rectangular drept.

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\,dy =$$
$$= -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma\, \mathrm{d}\sigma = -\iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \tag{14}$$

şi

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dx\,dy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\,dy =$$
$$= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx \tag{15}$$

Din (12), (13) şi (15) deducem:

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx = \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx - \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \tag{16}$$

În mod analog se arată că:

$$\oint_\Gamma Q(x,y,z)dy = \iint_{S_+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy - \iint_{S_+} \frac{\partial Q}{\partial z} dy\,dz \tag{17}$$

şi

$$\oint_\Gamma R(x,y,z)dz = \iint_{S_+} \frac{\partial R}{\partial y} dy\,dz - \iint_{S_+} \frac{\partial R}{\partial x} dz\,dx \tag{18}$$

Adunând relaţiile (16), (17) şi (18) obţinem formula lui Stokes din enunţul teoremei.

Observaţia 6.5.3 Formula lui Stokes rămâne valabilă şi pentru suprafeţe care sunt reuniuni finite de suprafeţe explicite de tipul celei din Teorema 6.4.2, două dintre acestea având în comun arce de curbă care sunt porţiuni din bordurile orientate ale acestor suprafeţe. Într-adevăr, scriind formula lui Stokes pentru fiecare din suprafeţele S_i şi adunând formulele obţinute, rezultă formula lui Stokes pentru suprafaţa $S = \bigcup_{i=1}^{p} S_i$.

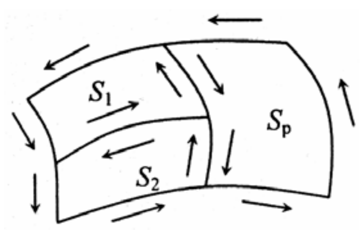


Fig. 3

Explicaţia constă în faptul că integrala curbilinie pe o curbă de intersecţie a două suprafeţe vecine intervine în suma din membrul stâng de două ori, cu orientări diferite, deci contribuţia sa în această sumă este nulă. În felul acesta în membrul stâng apare numai integrala curbilinie pe bordura

suprafeței S. Pe de altă parte este evident că $\iint\limits_{S} = \sum\limits_{i=1}^{p} \iint\limits_{(S_i)}$.

Observația 6.5.4 Ținând seama de legătura între integrala de suprafață de speța a doua şi integrala de suprafață de speța întâi, formula lui Stokes se mai scrie:

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] \mathrm{d}\sigma .$$

Dacă notăm cu $\vec{V}$ câmpul vectorial de componente P, Q, R, atunci

$$\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \text{ şi } \operatorname{rot}\vec{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} .$$

Fie de asemenea $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ versorul normalei la suprafața S orientată în sus şi fie $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Cu aceste precizări, formula lui Stokes devine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{V}\,d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot}\vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma .$$

Integrala din membrul stâng reprezintă circulația câmpului $\vec{V}$ de-a lungul curgei Γ, iar integrala din membrul drept reprezintă fluxul câmpului $\operatorname{rot}\vec{V}$ prin suprafața S în sensul normalei orientate în sus.

Exemplul 6.5.2 Folosind formula lui Stokes să se calculeze

$$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz ,$$ unde A, B, C sunt punctele de coordonate $A(a,0,0)$, $B(0,b,0), C(0,0,c)$, $a>0, b>0, c>0$.

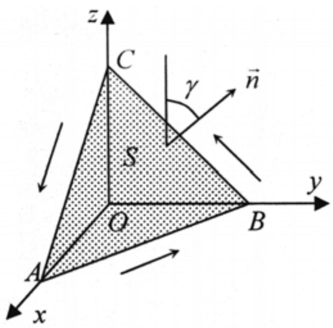


Fig. 4

Planul determinat de punctele A, B şi C are ecuația $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Observăm că triunghiul ABC este bordura suprafeței $S : z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$, $(x,y) \in D$, unde D este triunghiul (plin) OAB.

Notând cu $P = z - y$, $Q = x - z$ şi $R = y - x$, din formula lui Stokes rezultă:

$$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz = \iint_S 2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma$$, unde α,β,γ sunt unghiurile pe care le face normala la suprafața *S*, orientată în sus, cu axele *Ox*, *Oy* şi *Oz*. Cum γ este ascuțit, rezultă $\cos\gamma > 0$. Pe de altă parte avem $p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a}$, $q=-\frac{c}{b}$ şi $1+p^2+q^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2}$. Rezultă că:

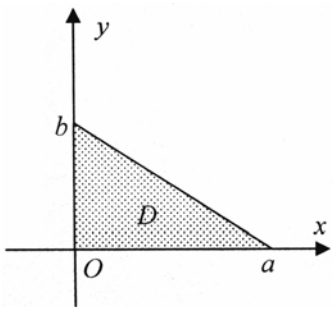


Fig. 5

$$\cos\gamma=\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$\cos\beta=\frac{ca}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. Cu aceste precizări, rezultă:

$$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz = \frac{2}{ab}\iint_D (bc+ca+ab)dx\,dy = bc+ca+ab.$$

7. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

7.1 NOȚIUNI GENERALE. TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Prin ecuația diferențială de ordinul întâi înțelegem o ecuație de forma:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

unde F este o funcție reală definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^3$, $y = y(x)$ este funcția necunoscută, iar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ este derivata de ordinul întâi a acesteia.

Definiția 7.1.1 *O funcție* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se numește soluție pentru ecuația diferențială* (1) *dacă este derivabilă pe I și* $F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0$, $\forall\ x \in I$ (Se subînțelege că se presupune că $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$, $\forall\ x \in I$).

Graficul unei soluții a ecuației (1) se mai numește și curbă integrală a ecuației (1). Prin soluție generală înțelegem o familie de soluții $y = \varphi(x, C)$, unde C este o constantă arbitrară. Prin particularizarea constantei C obținem diferite soluții particulare ale soluției (1).

Exemplul 7.1.1 Fie ecuația

$$y' = \frac{y}{x},\ x \neq 0. \tag{2}$$

Observăm că $y = Cx$, $x \in (0,\infty)$ este soluția generală a ecuației pe intervalul $(0,\infty)$. De asemenea $y = Cx$, $x \in (-\infty,0)$ este soluția generală a ecuației pe intervalul $(-\infty,0)$. Curbele integrale sunt semidreptele care pornesc din originea axelor de coordonate (Fig. 1).

Exemplul 7.1.2

$$y' = -\frac{y}{x},\ y \neq 0. \tag{3}$$

Observăm că oricare ar fi constanta $C > 0$, funcțiile $y = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$, $x \in (-C, C)$ sunt soluții pentru această ecuație pe intervalul $(-C, C)$.

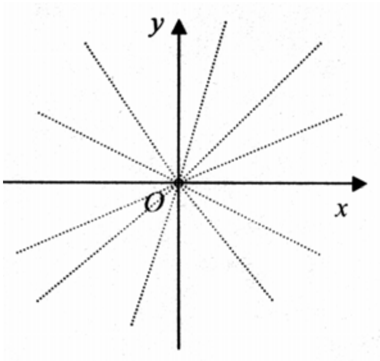


Fig. 1

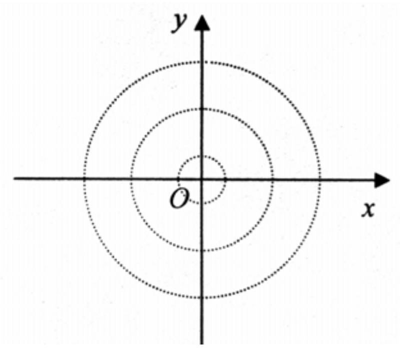


Fig. 2

Curbele integrale sunt semicercurile $x^2 + y^2 = C^2$, $y > 0$ (respectiv $y < 0$).

Observația 7.1.1 Există ecuații diferențiale care admit soluții ce nu se pot obține din soluția generală prin particularizarea constantei. O astfel de soluție se numește soluție singulară.

Exemplul 7.1.3 Fie ecuația

$$y = xy' + y'^2 \tag{4}$$

Soluția generală este $y = Cx + C^2$, $x \in$ P, aşa cum ne dăm seama printr-o verificare directă. Curbele integrale corespunzătoare soluției generale reprezintă o familie de drepte (fig. 3). Constatăm însă că ecuația admite şi soluția $y = -\frac{x^2}{4}$, $x \in$ P. Într-adevăr, înlocuind în ecuație obținem identitatea: $-\frac{x^2}{4} = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$, $x \in$ P. Pe de altă parte, este evident că această soluție nu se obține din soluția generală prin particularizarea constantei C. Aşadar, $y = -\frac{x^2}{4}$, $x \in$ P este o soluție singulară a ecuației (4). Curba sa integrală este o parabolă (înfăşurătoarea familiei de drepte $y = Cx + C^2$).

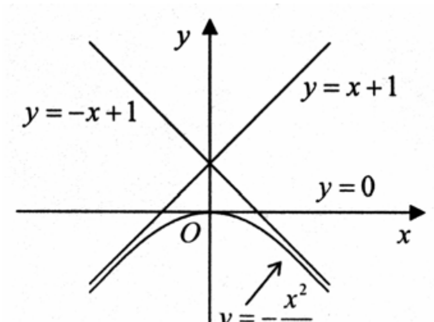


Fig. 3

Definiția 7.1.2 *O ecuație diferențială de forma*:

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

unde f este o funcţie reală continuă definită pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^2$*, se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul întâi sub formă normală.*

Problema Cauchy pentru ecuaţia (5) şi punctul $(x_0, y_0) \in D$, constă în determinarea unei soluţii φ a ecuaţiei (5) care verifică condiţia iniţială:

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{6}$$

Mai precis, problema constă în găsirea unei funcţii $\varphi : I \to$ P, de clasă C^1 pe intervalul *I*, care îndeplineşte următoarele condiţii:

$$(x, \varphi(x)) \in D,\ \forall\ x \in I,\ \varphi'(x) = f[x, \varphi(x)],\ \forall\ x \in I \text{ şi } \varphi(x_0) = y_0.$$

Lema 7.1.1 *Rezolvarea problemei Cauchy* (5) + (6) *este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei integrale*:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\,\mathrm{d}t,\quad x \in I \tag{7}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluţie pentru problema Cauchy (5) + (6) atunci

$$\varphi'(t) = f[t, \varphi(t)],\ \forall\ t \in I \text{ şi } \varphi(x_0) = y_0.$$

Integrând prima identitate, obţinem pentru orice $x \in I$:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Cum $\varphi(x_0) = y_0$, rezultă că $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\,\mathrm{d}t$, $\forall\ x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluţie pentru ecuaţia integrală (7).

Reciproc, dacă $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluţie pentru ecuaţia (7), atunci

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\,\mathrm{d}t,\ \forall\ x \in I.$$

Evident $\varphi(x_0) = y_0$. Pe de altă parte, prin derivare obţinem: $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$, $\forall\ x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluţie pentru problema Cauchy (5) + (6).

Definiţia 7.1.3 *O funcţie* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este lipschitziană în raport cu y, pe domeniul D, dacă există o constantă* $L \geq 0$ *astfel încât* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$*, oricare ar fi punctele* (x, y_1) *şi* (x, y_2) *din D.*

Observaţia 7.1.2 Dacă *D* este deschisă şi convexă, $f \in C^1(D)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este mărginită pe *D*, atunci *f* este lipschitziană în raport cu *y* pe *D*.

Într-adevăr, fie $M > 0$ astfel încât $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < M$, $\forall\ (x,y) \in D$. Din teorema creşterilor finite a lui Lagrange deducem că oricare ar fi punctele (x,y_1) şi (x,y_2) din D, există un punct ξ între y_1 şi y_2 astfel încât

$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y_1 - y_1)$. În continuare avem:

$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le M|y_1 - y_2|$, deci f este lipschitziană pe D.

Teorema 7.1.1 (Teorema de existenţă şi unicitate)

Fie $f : \overline{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi lipschitziană în raport cu y, pe* $\overline{D}$. *Atunci există o soluţie unică* $y = \varphi(x)$, $x \in I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$, *a problemei Cauchy* $y' = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, $y(x_0) = y_0$.

Demonstraţie. Cum f este continuă pe mulţimea compactă $\overline{D}$, rezultă că f este mărginită pe $\overline{D}$. Fie $M > 0$ astfel încât $\left|f(x,y)\right| < M$, $\forall\ (x,y) \in \overline{D}$. Fie de asemenea, L constanta lui Lipschitz, $\alpha \in (0,1)$ un număr oarecare şi $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{\alpha}{L}\right\}$. Notăm cu I intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ şi cu $F = \left\{g : I \to [y_0 - b, y_0 + b];\ g - \text{continuă}\right\}$. Observăm că F nu este un spaţiu vectorial, deoarece nu este închis la operaţia de adunare. Constatăm însă că F este un spaţiu metric, în raport cu distanţa

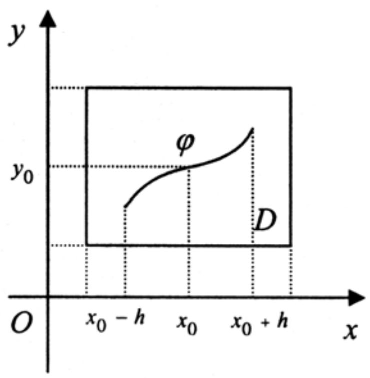


Fig. 4

$$d(g_1,g_2) = \sup\left\{\left|g_1(x) - g_2(x)\right|;\ x \in I\right\},\ \forall\ g_1,g_2 \in F \qquad (8)$$

Mai mult, F este un spaţiu metric complet. Într-adevăr, dacă $\{g_n\}$ este un şir fundamental de funcţii din F, atunci $\{g_n\}$ este un şir fundamental în spaţiul Banach $C(I) = \{g : I \to \mathbb{R},\ g - \text{continuă}\}$, înzestrat cu norma $\|g\| = \sup\left\{|g(x)|,\ x \in I\right\}$.

Rezultă că $\{g_n\}$ este convergent în $C(I)$, deci există $g : I \to \mathbb{R}$, continuă, astfel încât $d(g_n,g) = \|g_n - g\| \to 0$. Este clar însă, că dacă $g_n \in F$ şi $g_n \to g$, atunci $g \in F$. Aşadar, (F, d) este un spaţiu metric complet.

Definim aplicaţia $T : F \to F$ astfel:

$$T(g)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, g(t)]\mathrm{d}t\ ,\ \forall\ g \in F\ ,\ \forall\ x \in I \tag{9}$$

Observăm că $T(g)$ este o funcție continuă pe I şi că

$$|T(g)(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, g(t))|\mathrm{d}t\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le M \cdot \frac{b}{M} = b\,.$$

Rezultă că $T(g) \in F\ ,\ \forall\ g \in F$.

Mai mult, vom arăta că T este o contracție. Într-adevăr, ținând seama că F este lipschitziană în raport cu a doua variabilă, rezultă:

$$|T(g_1)(x) - T(g_2)(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} |f[t, g_1(t)] - f[t, g_2(t)]|\mathrm{d}t\right| \le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |g_1(t) - g_2(t)|\mathrm{d}t\right| \le L\mathrm{d}(g_1, g_2)|x - x_0| \le L\mathrm{d}(g_1, g_2)h \le \alpha\mathrm{d}(g_1, g_2),$$

$\forall\ x \in I$.

Trecând la marginea superioară obținem:

$$\mathrm{d}(T(g_1), T(g_2)) = \sup\{|T(g_1)(x) - T(g_2)(x)|;\, x \in I\} \le \alpha\mathrm{d}(g_1, g_2)\,.$$

Cum $\alpha \in (0,1)$, deducem că $T : F \to F$ este o contracție.

Din teorema de punct fix a lui Banach (Teorema 3.1.8 din [10]) rezultă că există $\varphi \in F$ unică, astfel încât $T(\varphi) = \varphi$. Aşadar, avem:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t\ ,\ \ \forall\ x \in I\ .$$

Din Lema 7.1.1 deducem că φ este o soluție unică pentru problema Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Observația 7.1.3 Teorema 7.1.1 ne dă o primă metodă aproximativă de rezolvare a problemei Cauchy şi anume metoda aproximațiilor succesive. Aşa cum ştim din teorema de punct fix a lui Banach, soluția φ a problemei Cauchy este limita în raport cu distanța, definită în (8), a şirului aproximațiilor succesive $\{y_n\}$, unde:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t, \qquad x \in I$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]\mathrm{d}t, \quad x \in I$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\mathrm{d}t, \ \ x \in I$$

Cum convergența în raport cu distanța (8) este echivalentă cu convergența uniformă, rezultă că $y_n \xrightarrow[I]{u} \varphi$.

Exemplul 7.1.4 Să se rezolve problema Cauchy

$$y' = y\,,\ (x,y) \in D = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right],\ \ y(0) = 1\,.$$

Se observă imediat că soluția acestei probleme Cauchy este

$$\varphi(x) = e^x\,,\ \ x \in I \subset \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Pe de altă parte, avem $f(x,y) = y$, $(x,y) \in D$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $a = b = \frac{1}{2}$, $M = \frac{3}{2}$ şi $L = 1$.

Dacă alegem $\alpha = \frac{1}{2}$ atunci $h = \min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, deci $I = \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

Şirul aproximațiilor succesive arată astfel:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = 1 + x \qquad ,x \in I$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad ,x \in I$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \qquad ,x \in I$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad ,x \in I$$

Cum $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ şi convergența este uniformă pe P, rezultă că $y_n \xrightarrow[I]{u} e^x$.

Observația 7.1.4 În exemplul 7.1.4 am putut afla limita şirului aproximațiilor succesive. De regulă, acest lucru nu este posibil şi de aceea vom aproxima limita acestui şir cu funcția determinată la pasul *n*. Cu alte cuvinte $\varphi \approx y_n$. Aşa cum ştim de la teorema de punct fix a lui Banach, eroarea satisface inegalitatea:

$$\left|\varphi(x) - y_n(x)\right| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\operatorname{dist}(y_0,y_1)\,,\ \ \forall\ x \in I\,.$$

Cum $\operatorname{dist}(y_0,y_1) = \sup\left\{\left|\int_{x_0}^x f(t,y_0)\,\mathrm{d}t\right|; x \in I\right\} \le M \cdot h$, rezultă că

$$\left|\varphi(x) - y_n(x)\right| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot Mh\,,\ \ \forall\ x \in I\,.$$

7.2 ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI DE FORME PARTICULARE

7.2.1. Ecuații cu variabile separabile

O ecuație cu variabile separabile este o ecuație de forma:

$$f_1(x)g_1(y)y' + f_2(x)g_2(y) = 0 \tag{10}$$

unde $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, $f_1 \neq 0$ pe I,

$g_1, g_2 : J \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, $g_2 \neq 0$ pe J.

Împărțind cu $f_1(x)g_2(y)$ ecuația devine:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx \tag{11}$$

Integrând, obținem:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx .$$

Exemplu $\left(1+x^2\right)yy' + x\left(1+y^2\right) = 0$.

Ecuația se pune sub forma evhivalentă $\frac{y}{1+y^2}dy = -\frac{x}{1+x^2}dx$.

Integrând obținem: $\int \frac{y}{1+y^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^2}dx$,

deci $\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln C$,

sau $1 + y^2 = \frac{C}{1+x^2}$, $C > 0$.

Dacă ne interesează soluția care îndeplinește condiția inițială $y(1) = 2$, obținem $C = 10$ şi mai departe $y = \pm\sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}$. Evident, soluția căutată este

$y = \sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}$, $x \in (-3,3)$.

7.2.2. Ecuații omogene

Sunt ecuații de forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{12}$$

unde f este o funcție continuă pe un interval I.

Dacă notăm cu $u = \dfrac{y}{x}$ şi considerăm $u = u(x)$ noua funcție necunoscută, rezultă $y(x) = xu(x)$ şi $y' = u + x \cdot u'$. În urma acestei schimbări de funcție necunoscută, ecuația (12) devine o ecuație cu variabile separabile, anume: $u + x \cdot u' = f(u)$.

Cazul $f(u) = u$ a fost prezentat în Exemplul 7.1.1. Putem deci presupune că $f(u) \neq u$. Separând variabilele obținem:

$\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$ şi mai departe $\displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + \ln C$.

Exemplu $y' = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, $x \neq 0$.

Notând cu $u = \dfrac{y}{x}$ obținem $u + xu' = u + u^2$, deci $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$. Integrând rezultă $-\dfrac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$ şi mai departe $-\dfrac{x}{y} = \ln C|x|$. Din această relație se obțin soluțiile corespunzătoare diferitelor condiții inițiale. De exemplu, soluția care îndeplineşte condiția inițială $y(2) = 1$ este $y = \dfrac{x}{2 + \ln 2 - \ln x}$, $x \in \left(0, 2e^2\right)$.

7.2.3. Ecuații liniare

Ecuațiile liniare neomogene sunt ecuații de forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{13}$$

unde P şi Q sunt funcții continue pe un interval I.

Ecuația liniară omogenă asociată este

$$y' + P(x)y = 0 \tag{14}$$

Observăm că ecuația omogenă (14) este o ecuație cu variabile separabile. Separând variabilele şi integrând obținem:

$\dfrac{dy}{y} = -P(x)dx$, $y \neq 0$

$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C$ şi mai departe

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \ C \in \text{P}. \tag{15}$$

Deşi soluția (15) s-a obținut în ipoteza $y \neq 0$, care presupune $C \neq 0$, observăm că ecuația (14) admite şi soluția $y = 0$ care s-a pierdut la împărțirea cu y. Aşadar (15) reprezintă soluția generală a ecuației omogene (14).

Pentru a obține soluția generală a ecuației neomogene (13) folosim metoda variației constantei a lui Lagrange şi anume: căutăm soluția ecuației neomogene (13) de forma

$$y = \varphi(x) e^{-\int P(x)dx} \tag{16}$$

unde φ este o funcție de clasă C^1 pe intervalul I. Pentru determinarea funcției φ punem condiția ca (16) să fie soluție pentru ecuația (13) și obținem:

$$\varphi'(x) e^{-\int P(x)dx} - \varphi(x)P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x)\varphi(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x) .$$

Efectuând calculele rezultă

$\varphi'(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx}$, și mai departe $\varphi(x) = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C$.

Înlocuind în (16) obținem soluția generală a ecuației neomogene (13) și anume:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right) \tag{17}$$

Exemplu $y' + y \sin x = -\sin x \cos x$

Avem $P(x) = \sin x$ și $Q(x) = -\sin x \cos x$.

Înlocuind în (17) obținem:

$$y = e^{\cos x}\left(C - \int \sin x \cos x\, e^{-\cos x} dx \right) = e^{\cos x}\left(C - e^{-\cos x}\cos x - e^{-\cos x} \right),$$

deci $y = C e^{\cos x} - \cos x - 1$.

7.2.4. Ecuații Bernoulli

Sunt ecuații de forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} ,\quad \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1 \tag{18}$$

Presupunem că P și Q sunt funcții continue pe un interval I. Împărțind cu y^{α} pentru $y \neq 0$ obținem: $y^{\alpha} y' + P(x) y^{1-\alpha} = Q(x)$.

Dacă facem schimbarea de funcție $y^{1-\alpha} = z$, unde $z = z(x)$ este noua funcție necunoscută, rezultă $(1-\alpha) y^{1-\alpha} \cdot y' = z'$ și mai departe

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x) z = Q(x) \tag{19}$$

Observăm că am obținut o ecuație liniară.

Exemplu $y' - \dfrac{y}{3x} = \dfrac{1}{3} y^4 \ln x$, $x \in (0,\infty)$.

Împărțind cu y^4 pentru $y \neq 0$ rezultă $y^{-4} \cdot y' - \dfrac{1}{3x} y^{-3} = \dfrac{1}{3} \ln x$.

Dacă notăm cu $z = y^{-3}$, atunci $z' = -3y^{-4} y'$ și ecuația devine:

$z' + \dfrac{1}{x} z = -\ln x$. Aceasta este o ecuație liniară cu $P(x) = \dfrac{1}{x}$ și $Q(x) = -\ln x$.

Folosind formula (17) obținem:

$$z = e^{-\ln x}\left(C - \int \ln x\, e^{\ln x} dx\right) = \frac{1}{x}\left(C - \int x \ln x\, dx\right)$$

şi mai departe $z = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x$. Aşadar avem: $y^{-3} = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x$, $x > 0, y \neq 0$.

Diferite soluții particulare se obțin precizând condițiile inițiale.

7.2.5. Ecuații Riccati

Sunt ecuații de forma

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{20}$$

unde P, Q şi R sunt funcții continue pe un interval I. Dacă se cunoaşte o soluție particulară a ecuației (20), anume $y_p : J \subset I \to \mathbb{R}$, atunci efectuând schimbarea de funcție $y = y_p + \frac{1}{z}$, ecuația se reduce la o ecuație liniară. Într-adevăr, derivând şi înlocuind în ecuația (20) obținem:

$$y_p' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_p^2 + 2\frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + Q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + R(x).$$

Ținând seama că y_p verifică ecuația (20), deci că

$y_p' = P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x)$, rezultă

$$z' + \left[2y_p P(x) + Q(x)\right]z = -P(x). \tag{21}$$

Observăm că ecuația (21) este o ecuație liniară.

Exemplu $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}$, $x \in (0,\infty)$.

Observăm că $y = \frac{1}{x}$ este o relație particulară a ecuației. Facem schimbarea de funcție $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ şi obținem:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{2}{3x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3xz} - \frac{1}{3z^2}.$$

Rezultă următoarea ecuație liniară:

$z' - \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3}$, a cărei soluție generală este $z = Cx^{\frac{2}{3}} + x$.

Soluția generală a ecuației Riccati este:

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{2/3} + x}$, $x \in (0,\infty)$, $C > 0$.

7.2.6. Ecuaţia Clairaut

Sunt ecuaţii de forma:

$$y = xy' + \varphi(y') \tag{22}$$

unde φ este o funcţie de clasă C^1 pe un interval J.

Notând $y' = p$ ecuaţia devine $y = x \cdot p + \varphi(p)$.

Derivând în raport cu x obţinem: $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + \varphi'(p)\dfrac{dp}{dx}$, deci

$[x + \varphi'(p)]\dfrac{dp}{dx} = 0$.

Dacă $\dfrac{dp}{dx} = 0$, rezultă $p = C$ şi mai departe

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{23}$$

Familia de soluţii (23) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (22). Din punct de vedere geometric, curbele integrale corespunzătoare acestei soluţii sunt drepte.

Pe de altă parte, din $x + \varphi'(p) = 0$, obţinem soluţia singulară

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases} \tag{24}$$

Curba integrală corespunzătoare soluţiei singulare (24) este înfăşurătoarea familiei de drepte (23).

Exemplu $y = xy' - \dfrac{y'^2}{2}$.

Soluţia generală este $y = Cx - \dfrac{C^2}{2}$, $C \in$ P.

Soluţia singulară sub formă parametrică este:

$$\begin{cases} x = p \\ y = \dfrac{p^2}{2} \end{cases}.$$

Eliminând pe p între cele două ecuaţii parametrice obţinem $y = \dfrac{x^2}{2}$, adică o parabolă.

7.2.7. Ecuaţii cu diferenţiale exacte. Factor integrant

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{25}$$

unde P şi Q sunt funcții de clasă C^1 pe dreptunghiul $D=(a,b)\times(c,d)$, $Q\neq 0$ pe D şi $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pe D. Fie $(x_0,y_0)\in D$ un punct oarecare fixat şi fie F : $D\to$ P, definită astfel:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\mathrm{d}t,\ (x,y)\in D \tag{26}$$

Propoziția 7.2.7 *În condițiile de mai sus, orice funcție implicită* $y=\varphi(x)$ *definită de ecuația* $F(x,y)=C$*,* $C\in$ P, *este soluție pentru ecuația diferențială* (*25*) *şi orice soluție a ecuației* (*25*) *este de această formă.*

Demonstrație. Pentru început vom arăta că $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$. Într-adevăr, ținând seama de formula de derivare a integralei cu parametru şi de ipoteza $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial P}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t=$$
$$=P(x,y_0)+P(x,y)-P(x,y_0)=P(x,y).$$

De asemenea, avem: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$. Aşadar, funcția F definită în (26) are proprietatea că $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$. Cu alte cuvinte forma diferențială $\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ este exactă.

Fie ecuația

$$F(x,y)=C,\ (x,y)\in D \tag{27}$$

Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q\neq 0$ pe D, rezultă că în vecinătatea oricărui punct din D ecuația (27) defineşte o funcție implicită $y=\varphi(x)$, $x\in I$. Deoarece $F[x,\varphi(x)]=0$, $\forall\ x\in I$, derivând obținem $\dfrac{\partial F}{\partial x}[x,\varphi(x)]+\dfrac{\partial F}{\partial y}[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall\ x\in I$.

Ținând seama că $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$, deducem că $P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall\ x\in I$, deci $y=\varphi(x)$, $x\in I$ este soluție pentru ecuația (25).

Reciproc, fie $y=\varphi(x)$, $x\in I$ o soluție a ecuației (25). Atunci, $\forall\ x\in I$ avem $\left(x,\varphi(x)\right)\in D$ și $P\left[x,\varphi(x)\right]+Q\left[x,\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)=0$. Deoarece $\frac{\partial F}{\partial x}=P$ și $\frac{\partial F}{\partial y}=Q$ rezultă $\frac{\partial F}{\partial x}\left[x,\varphi(x)\right]+\frac{\partial F}{\partial y}\left[x,\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall\ x\in I$, ceea ce este echivalent cu $\frac{d}{dx}\left(F\left(x,\varphi(x)\right)\right)=0$, $\forall\ x\in I$.

Din ultima relație deducem că $F\left[x,\varphi(x)\right]=C$, $\forall\ x\in I$, deci $y=\varphi(x)$, $x\in I$ este o funcție implicită definită de ecuația (27).

Exemplul 7.2.7 Să se afle soluțiile ecuației
$\left(3x^2-y\right)+\left(3y^2-x\right)y'=0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(3a^2,a\right);\,a\in\mathbb{R}\right\}$.

Avem $P(x,y)=3x^2-y$, $Q(x,y)=3y^2-x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-1$.

$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(3t^2-y_0\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(3t^2-x\right)\mathrm{d}t=x^3+y^3-xy+x_0y_0-x_0^3-y_0^3$.

Așadar, orice soluție a ecuației date este de forma $y=\varphi(x),\ x\in I$, unde φ este o funcție implicită definită de ecuația $x^3+y^3-xy=K$.

Observația 7.2.7 Dacă $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, atunci se caută un factor integrant. Prin factor integrant se înțelege o funcție $\mu=\mu(x,y)$, $\mu\in C^1(D)$, $\mu\neq 0$ pe D cu proprietatea

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)Q(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)P(x,y)\right],\ (x,y)\in D \tag{28}$$

Așadar, să presupunem că avem ecuația diferențială

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0,\ Q\neq 0 \text{ pe } D \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y} \tag{29}$$

Dacă reușim să găsim un factor $\mu=\mu(x,y)$ și înmulțim ecuația (29) cu acest factor integrant, obținem ecuația echivalentă $\mu(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)Q(x,y)y'=0$, care este de tipul (25) și a cărei soluție se află în conformitate cu Propoziția 7.2.7. Determinarea factorului integrant se face prin încercări. Să căutăm pentru început un factor integrant de forma $\mu=\mu(x)$ (care depinde numai de x). Din (28) rezultă $\mu'(x)Q(x,y)+\mu(x)\frac{\partial Q}{\partial x}=\mu(x)\frac{\partial P}{\partial y}$ și mai departe

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \qquad (30)$$

Pentru ca egalitatea (30) să fie posibilă trebuie ca expresia $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ să depindă numai de *x*.

Aşadar, ecuaţia (29) admite factor integrant $\mu = \mu(x)$, dacă $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ depinde numai de *x*. Să notăm cu $\varphi(x) = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$. Atunci $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \varphi(x)$ şi integrând obţinem $\ln|\mu(x)| = \int \varphi(x)dx + C$.

Putem alege factorul integrant $\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$.

Exemplu Fie ecuaţia $\left(1 - x^2 y\right) + x^2 \left(y - x\right) y' = 0$, $x \neq 0, x \neq y$. Avem $P = 1 - x^2 y$, $Q = x^2 \left(y - x\right)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2 \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2$, $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = -\dfrac{2}{x}$. Rezultă că $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \dfrac{1}{x^2}$. Amplificând ecuaţia dată cu acest factor integrant obţinem $\left(\dfrac{1}{x^2} - y\right) + \left(y - x\right) y' = 0$.

Fie $P_1 = \dfrac{1}{x^2} - y$ şi $Q_1 = y - x$. Observăm că $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = -1$.

$$F\left(x, y\right) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{t^2} - y_0\right) \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \left(t - x\right) \mathrm{d}t = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + K.$$

Soluţia ecuaţiei va fi orice funcţie implicită $y = \varphi(x)$, $x \in I$ definită de ecuaţia $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{x} - xy = C$.

În mod analog, se arată că ecuaţia (29) cu $P \neq 0$, admite un factor integrant depinzând numai de *y* ($\mu = \mu(y)$) dacă expresia $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$ depinde numai de *y*.

Exemplu Fie ecuația $y^2(2x-3y)+\left(7-3xy^2\right)y'=0$, $y\neq 0$, $2x\neq 3y$, $7\neq 3xy^2$. Avem

$$P=y^2(2x-3y),\ Q=7-3xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=4xy-9y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2;$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=-\frac{2}{y};\ \mu(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Înmulțind ecuația inițială cu $\frac{1}{y^2}$ obținem ecuația echivalentă

$$2x-3y+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)y'=0.$$

$$P_1=2x-3y;\ Q_1=\frac{7}{y^2}-3x;\ \frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{\partial P_1}{\partial y}=-3.$$

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}(2t-3y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{7}{t^2}-3x\right)\mathrm{d}t=x^2-3xy-\frac{7}{y}+C.$$

Orice funcție implicită $y=\varphi(x),\ x\in I$ definită de ecuația $x^2-3xy-\frac{7}{y}=K$ este soluția pentru ecuația dată.

Dacă ecuația nu admite factori integranți de forma $\mu=\mu(x)$ sau $\mu=\mu(y)$ se caută factori integranți de forme mai complicate $\mu=\mu(xy)$, $\mu=\mu(ax+by)$, $\mu=\mu\left(\frac{x}{y}\right)$ etc.

7.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL *n*

Prin ecuație diferențială liniară de ordinul n înțelegem orice ecuație de forma:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x),\quad x\in J \tag{1}$$

unde b și a_i, $i=\overline{0,n}$ sunt funcții continue pe intervalul J și $a_0(x)\neq 0$, $\forall\, x\in J$.

Ecuația omogenă asociată este

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,\quad x\in J \tag{2}$$

Dacă notăm cu $D=\frac{d}{dx}$ (operatorul de derivare), cu

$D^p = \underbrace{D \circ D \circ \ldots \circ D}_{p \text{ ori}} = \dfrac{d^p}{dx^p}$, cu I operatorul identitate pe spaţiul funcţiilor de clasă $C^{(n)}$ pe J, $\left[I(y) = y, \forall\, y \in C^{(n)}(J)\right]$ şi cu $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n I$, atunci ecuaţiile (1) şi (2) devin:

$$L(D)(y) = f(x) \tag{1'}$$

$$L(D)(y) = 0 \tag{2'}$$

Prin soluţie a ecuaţiei (1) (respectiv (1')), înţelegem orice funcţie $\varphi \in C^{(n)}(J)$ care verifică ecuaţia:

$L(D)(\varphi(x)) = f(x)$ [respectiv $L(D)(\varphi(x)) = 0$], $\forall\, x \in J$.

Notăm cu S mulţimea soluţiilor ecuaţiei omogene (2).

Observaţia 7.3.1 S este un spaţiu vectorial real. Într-adevăr, deoarece operatorul de derivare D este liniar, rezultă că operatorul $L(D)$ este liniar.

Fie $y_1, y_2 \in S$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$L(D)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(D)(y_1) + \alpha_2 L(D)(y_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0,$$

deci $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in S$.

Definiţia 7.3.1 *Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : J \to \mathbb{R}$, n funcţii de clasă $C^{(n-1)}$ pe intervalul J. Se numeşte wronskianul acestor funcţii, următoarea funcţie:*

$$W(x) = W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_n'(x) \\ ---- & ---- & ---- \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \ \forall \ \ x \in J .$$

Propoziţia 7.3.1 *Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, n-funcţii de clasă $C^{(n-1)}$ pe intervalul J. Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sunt liniar dependente pe J, atunci $W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x) = 0$, $\forall\ x \in J$.*

Demonstraţie.

Prin ipoteză există n numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, nu toate nule, astfel încât:

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \ldots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0 , \ \forall \ x \in J \tag{3}$$

Derivând succesiv relaţia (3) de $(n-1)$ ori obţinem:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \varphi_1'(x) + \lambda_2 \varphi_2'(x) \quad + \ldots + \quad \lambda_n \varphi_n'(x) = 0 \\ ------------------------ \\ \lambda_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 \varphi_2^{(n-1)}(x) \quad + \ldots + \quad \lambda_n \varphi_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array} , \ \forall \ x \in J .$$

Am obţinut astfel un sistem (algebric) liniar şi omogen de n-ecuaţii cu n-necunoscute. Deoarece sistemul admite soluţie nebanală (prin ipoteză cel puţin una din necunoscutele $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ este diferită de 0) rezultă că determinantul coeficienţilor este zero. Aşadar, avem

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n'(x) \\ \hline \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=0\,,\ \forall\ \ x\in J\ .$$

Propoziţia 7.3.2 *Fie* $\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$, $(n-1)$ *funcţii de clasă* $C^{(n)}$ *pe intervalul J cu proprietăţile:*

$W[\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n](x)\neq 0,\quad \forall\ x\in J$.

$W[\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n](x)=0$, $\forall\ x\in J$.

Atunci, există n constante reale $C_1,C_2,\ldots,C_n$ astfel încât

$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$, $\forall\ x\in J$.

Demonstraţie. Pentru simplificarea scrierii facem demonstraţia în cazul particular $n=2$. Prin ipoteză avem:

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'(x) & \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \\ \varphi''(x) & \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) \end{vmatrix}=0\,,\ \forall\ \ x\in J \tag{4}$$

Deoarece coloanele 2 şi 3 ale acestui determinant sunt liniar independente (prin ipoteză $W[\varphi_1,\varphi_2](x)\neq 0$, $\forall\, x\in J$) rezultă că prima coloană a determinantului (4) este combinaţie liniară de acestea. Aşadar, $\forall\, x\in J$, există $\lambda_1(x),\lambda_2(x)\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} \varphi(x)=\lambda_1(x)\varphi_1(x)+\lambda_2(x)\varphi_2(x) \\ \varphi'(x)=\lambda_1(x)\varphi_1'(x)+\lambda_2(x)\varphi_2'(x) \\ \varphi''(x)=\lambda_1(x)\varphi_1''(x)+\lambda_2(x)\varphi_2''(x) \end{cases} \tag{5}$$

Deoarece, din primele 2 ecuaţii din (5), λ_1 şi λ_2 se pot exprima în funcţie de $\varphi,\varphi_1,\varphi_2$ şi de derivatele de ordinul întâi ale acestora, iar $\varphi\in C^2(J)$, rezultă că $\lambda_1,\lambda_2\in C^1(J)$. Derivând prima relaţie din (5) obţinem:

$\varphi'(x)=\lambda_1(x)\varphi_1'(x)+\lambda_2(x)\varphi_2'(x)+\lambda_1'(x)\varphi_1(x)+\lambda_2'(x)\varphi_2(x)$.

Ţinând seama de a doua relaţie din (5) deducem

$\lambda_1'(x)\varphi_1(x)+\lambda_2'(x)\varphi_2(x)=0$.

În mod analog, derivând a doua relație din (5) şi ținând seama de a treia relație din (5) deducem

$\lambda_1'(x)\varphi_1'(x)+\lambda_2'(x)\varphi_2'(x)=0$.

Am obținut un sistem liniar şi omogen de 2 ecuații cu 2 necunoscute: $\lambda_1'(x)$ şi $\lambda_2'(x)$. Deoarece, prin ipoteză determinantul coeficienților

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = W\left[\varphi_1,\varphi_2\right](x)\neq 0,$$

rezultă că sistemul admite numai soluția banală. Aşadar,

$\lambda_1'(x)=0, \quad \lambda_2'(x)=0, \ \forall\, x\in J$; deci

$\lambda_1(x)=C_1$, $\lambda_2(x)=C_2$, $\forall\, x\in J$.

Conform primei relații din (5) avem:

$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$, $\forall\, x\in J$.

Teorema 7.3.1 (Liouville)

Fie $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *, n-soluții particulare ale ecuației omogene* (*2*)*, fie* $W(x)=W\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right](x)$*,* $x\in J$ *şi* $x_0\in J$ *oarecare fixat. Atunci, pentru orice* $x\in J$ *avem:*

$$W(x)=W\left(x_0\right)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Demonstrație. Prezentăm demonstrația pentru cazul particular $n = 2$. Fie y_1,y_2, soluții particulare ale ecuației (2). Atunci avem

$$y_i''=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y_i'-\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y_i\,,\ i=1,2,\ x\in J \tag{7}$$

Pe de altă parte, derivând funcția W, $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, $x\in J$, obținem

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Ținând seama de relațiile (7) şi de proprietățile determinanților, deducem:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -\frac{a_1}{a_0}y_1'-\frac{a_2}{a_0}y_1 & -\frac{a_1}{a_0}y_2'-\frac{a_2}{a_0}y_2 \end{vmatrix}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Prin urmare avem

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}W(x)\,,\ \forall\, x\in J \tag{8}$$

Ecuația diferențială (8) este o ecuație liniară omogenă de ordinul întâi a cărei soluție generală este

$$W(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\mathrm{d}t} \tag{9}$$

În particular, pentru $x=x_0$ rezultă $C=W\left(x_0\right)$, deci

$$W(x)=W\left(x_0\right)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\mathrm{d}t}.$$

Definiția 7.3.2 *Se numește sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă* (*2*)*, orice set de n soluții particulare* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *ale ecuației* (*2*) *cu proprietatea că există* $x_0\in J$ *, astfel încât* $W\left[y_1,\ldots,y_n\right](x_0)\neq 0$.

Corolarul 7.3.1 *Dacă* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *este un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene* (*2*)*, atunci* $y_1,\ldots,y_n$ *sunt liniar independente pe intervalul J.*

Demonstrație.

Fie $x_0\in J$, astfel încât $W\left(x_0\right)=W\left[y_1,\ldots,y_n\right](x_0)\neq 0$. Din Teorema Liouville rezultă că $W(x)\neq 0$, $\forall\ x\in J$, iar din Propoziția 7.3.1 rezultă că $y_1,\ldots,y_n$ sunt liniar independente pe J.

Teorema 7.3.2 *Fie* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene* (*2*)*. Atunci, oricare ar fi y soluție a ecuației* (*2*)*, există* $C_1,\ldots,C_n\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $y(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$*,* $\forall\ x\in J$.

Demonstrație.

Deoarece $y_1,y_2,\ldots,y_n$ sunt soluții pentru (2) rezultă:

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \\ a_0(x)y_1^{(n)}+a_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y_1'+a_n(x)y_1=0 \\ \text{-----------------------------} \\ a_0(x)y_n^{(n)}+a_1(x)y_n^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y_n'+a_n(x)y_n=0 \end{cases} \tag{10}$$

Sistemul (10) este liniar și omogen și admite soluții nebanale, $\forall\ x\in J$ [Deoarece prin ipoteză $a_0(x)\neq 0$, $\forall\ x\in J$]. Rezultă că determinantul coeficienților este 0, deci

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \cdots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix}=0,\quad \forall\ x\in J. \tag{11}$$

Egalitatea (11) este echivalentă cu

$$W\left[y,y_1,\ldots,y_n\right](x)=0,\quad \forall\ x\in J. \tag{12}$$

Pe de altă parte, prin ipoteză există $x_0 \in J$ astfel încât $W\left[y_1,\ldots,y_n\right]\left(x_0\right) \neq 0$ şi conform teoremei Liouville rezultă că $W\left[y_1,\ldots,y_n\right](x) \neq 0$, $\forall \ x \in J$. Sunt îndeplinite aşadar ipotezele Propoziției 7.3.2, de unde deducem că există $C_1,\ldots,C_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Observația 7.3.2 Orice sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2) este o bază în spațiul vectorial S al soluțiilor ecuației (2) şi $\dim_{\mathbb{R}} S = n$. Într-adevăr, din Corolarul 7.3.1 deducem că $y_1,\ldots,y_n$ sunt liniar independente pe J, iar din Teorema 7.3.2 că $y_1,\ldots,y_n$ formează un sistem de generatori pentru S. Cum dimensiunea unui spațiu vectorial este egală cu numărul vectorilor din orice bază a sa, rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} S = n$.

Observația 7.3.3 Din Teorema 7.3.2 rezultă că dacă $y_1,\ldots,y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă (2), atunci soluția generală*) a ecuației (2) este $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, $\forall \ C_1, C_2,\ldots,C_n \in \mathbb{R}$.

Propoziția 7.3.3 *Fie y_p o soluție oarecare a ecuației neomogene (1), oarecare fixată. Atunci, orice soluție y a ecuației neomogene (1) este de forma*

$$y = y_0 + y_p \tag{13}$$

unde y_0 este o soluție a ecuației omogene (2).

Demonstrație.

Fie S spațiul vectorial al soluțiilor ecuației omogene (2) şi fie S mulțimea soluțiilor ecuației neomogene (1). Dacă $y = y_0 + y_p$ unde $y_0 \in S$ şi $y_p \in \mathsf{S}$, atunci $L(D)(y) = L(D)(y_0) + L(D)(y_p) = 0 + f(x) = f(x)$. Rezultă că $y \in \mathsf{S}$. Reciproc, fie $y \in \mathsf{S}$ şi $z = y - y_p$. Atunci $L(D)(z) = L(D)(y) - L(D)(y_p) = f(x) - f(x) = 0$, deci $z \in S$. Prin urmare $y = z + y_p$, unde $z \in S$.

În cele ce urmează vom arăta că dacă se cunoaşte soluția generală a ecuației omogene (2), atunci, folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange, se poate afla soluția generală a ecuației neomogene (1). Pentru simplificarea scrierii, să presupunem că $n = 2$.

---

*) Prin soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n, $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, se înțelege o familie de soluții ale acesteia, de forma $y = \varphi\left(x, C_1, \ldots, C_n\right)$, unde C_i sunt constante arbitrare.

Fie y_1, y_2 un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației omogene este

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{14}$$

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2 \tag{15}$$

Derivând, obținem: $y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2' + \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2$.

Impunem condiția

$$\varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2 = 0 \tag{16}$$

Ținând seama de (16), rezultă că

$$y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2', \tag{17}$$

şi mai departe că

$$y'' = \varphi_1(x) y_1'' + \varphi_2(x) y_2'' + \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' \tag{18}$$

În sfârşit, punând condiția ca funcția definită în (14) să verifice ecuația $a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$ şi ținând seama de (17) şi (18) rezultă:

$$a_0(x)\left[\varphi_1(x) y_1'' + \varphi_2(x) y_2'' + \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'\right] + a_1(x)\left[\varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2'\right] +$$
$$+ a_2(x)\left[\varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2\right] = f(x).$$

În continuare avem:

$$\varphi_1(x)\left[a_0(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1\right] + \varphi_2(x)\left[a_0(x) y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2\right] +$$
$$+ a_0(x)\left[\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'\right] = f(x).$$

Ținând seama că y_1 şi y_2 sunt soluții pentru ecuația omogenă, rezultă că $a_0(x)\left[\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'\right] = f(x)$, deci că

$$\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)} \tag{19}$$

În concluzie, dacă, căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) sub forma (15), atunci funcțiile φ_1 şi φ_2 satisfac condițiile (16) şi (19), anume:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2 = 0 \\ \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \tag{20}$$

Cum determinantul coeficienților sistemului liniar (20) este chiar wronskianul funcțiilor y_1, y_2 şi este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (20) are soluție unică. Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x)$ şi $\varphi_2'(x) = g_2(x)$ soluția unică a sistemului (20). Mai departe avem:

$$\varphi_1(x) = \int g_1(x)\mathrm{d}x + C_1 \text{ şi } \varphi_2(x) = \int g_2(x)\mathrm{d}x + C_2 \tag{21}$$

Înlocuind (21) în (15) obținem soluția generală a ecuației neomogene:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int g_1(x) dx + y_2 \int g_2(x) dx = y_0 + y_p \tag{22}$$

unde $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ este soluția generală a ecuației omogene, iar
$y_p = y_1 \int g_1(x)dx + y_2 \int g_2(x)dx$ este o soluție particulară a ecuației neomogene.

Observația 7.3.4 În cazul general, metoda variației constantelor constă în următoarele: fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației (2) este: $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$.

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \ldots + \varphi_n(x) y_n \tag{23}$$

unde $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$ verifică sistemul

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_1 + \ldots + \varphi_n'(x) y_n = 0 \\ \varphi_1'(x) y_1' + \ldots + \varphi_n'(x) y_n' = 0 \\ \text{-------------------------} \\ \varphi_1'(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + \varphi_n'(x) y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \tag{24}$$

Rezolvând sistemul (24) (care are soluție unică) şi integrând, obținem funcțiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ şi deci soluția generală a ecuației neomogene (23).

În concluzie, dacă cunoaştem un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă, atunci folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange putem să aflăm soluția generală a ecuației neomogene. În general, determinarea unui sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă este dificilă pentru ecuații cu coeficienți variabili. Acest lucru este posibil însă, în cazul ecuațiilor cu coeficienți constanți, de care ne vom ocupa în continuare.

Fie

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{25}$$

o ecuație diferențială liniară şi omogenă de ordinul *n*, cu $a_i \in \mathbb{R}$, constante, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

Căutăm soluții ale ecuației (25) de forma

$$y = e^{rx} \tag{26}$$

unde *r* este o constantă reală.

Punând condiția ca funcția definită în (26) să fie soluție pentru ecuația (25) rezultă:

$$e^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\right) = 0.$$

Se obține astfel o ecuație algebrică de ordinul *n*, care se numeşte ecuația caracteristică:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{27}$$

Distingem următoarele cazuri:

Cazul 1. Ecuația caracteristică (27) are rădăcini reale și distincte două câte două.

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, $r_i \neq r_j$ dacă $i \neq j$, rădăcinile ecuației caracteristice (27). Atunci: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$, vor fi soluții ale ecuației diferențiale (25). Wronskianul acestor soluții este

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots & r_n e^{r_n x} \\ \hline r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{\left(r_1 + r_2 + \ldots + r_n\right)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \hline r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\left(r_1 + \ldots + r_n\right)x} \prod_{1 \le j < i \le n} \left(r_i - r_j\right) \neq 0 .$$

Rezultă că aceste soluții formează un sistem fundamental de soluții, deci soluția generală a ecuației (25) este $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$.

Exemplul 7.3.1 Să se afle soluția generală a ecuației $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Ecuația caracteristică este $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ și are soluțiile $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Soluția generală este $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$.

Cazul 2. Ecuația caracteristică admite o rădăcină multiplă de ordinul $m \le n$. Vom arăta în acest caz, că dacă de exemplu r_0 este această rădăcină, atunci ecuația diferențială (25) admite soluțiile: $e^{r_0 x}, xe^{r_0 x}, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{r_0 x}$.

Pentru început vom demonstra următoarea lemă.

Lema 7.3.1 *Pentru orice funcție* $g \in C^{(k)}\left(J\right)$ *avem*:
$\left(D - rI\right)^k \left[e^{rx} g(x)\right] = e^{rx} g^{(k)}(x)$, *unde* $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *este operatorul de derivare și I este operatorul identitate pe* $C^{(k)}\left(J\right)$.

Demonstrație.

Demonstrația se face prin inducție matematică. Pentru $k = 1$ avem: $\left(D - rI\right)\left[e^{rx} g(x)\right] = re^{rx} g(x) + e^{rx} g'(x) - re^{rx} g(x) = e^{rx} g'(x)$.

Presupunem afirmația adevărată pentru $p < k$ și o demonstrăm pentru $p + 1$. Într-adevăr

$$\left(D - rI\right)^{p+1}\left[e^{rx} g(x)\right] = \left(D - rI\right)\left[\left(D - rI\right)^p \left(e^{rx} g(x)\right)\right] = \left(D - rI\right)\left(e^{rx} g^{(p)}(x)\right) =$$

$$= re^{rx} g^{(p)}(x) + e^{rx} g^{(p+1)}(x) - re^{rx} g^{(p)}(x) = e^{rx} g^{(p+1)}(x)$$

Fie acum r_0 o rădăcină de ordinul de multiplicitate *m* pentru ecuația caracteristică (27). Dacă notăm cu $F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n$, membrul stâng al ecuației (25), atunci $F(r) = F_1(r)(r - r_0)^m$, unde F_1 este o funcție polinomială de gradul *n – m*. Acestei descompuneri în factori a polinomului caracteristic îi corespunde următoarea descompunere a operatorului *L*(*D*):

$L(D) = L_1(D) \circ (D - r_0 I)^m$. Mai precis, dacă

$F_1(r) = b_0 r^{n-m} + b_1 r^{n-m-1} + \ldots + b_{n-m}$, atunci

$L_1(D) = b_0 D^{n-m} + b_1 D^{n-m-1} + \ldots + b_{n-m} I$.

Pentru orice *k* < *m*, din Lema 7.3.1 rezultă:

$$L(D)\left(x^k e^{r_0 x}\right) = L_1(D)\left[(D - r_0 I)^m \left(x^k e^{r_0 x}\right)\right] =$$

$$= L_1(D)\left[e^{r_0 x}\left(x^k\right)^{(m)}\right] = L_1(D)(0) = 0.$$

Rezultă că $x^k e^{r_0 x}$ este o soluție pentru ecuația diferențială (25), oricare ar fi $k = \overline{0, m-1}$.

Observația 7.3.5 Funcțiile $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^p e^{rx}$, $x \in J$ sunt liniar independente pe intervalul *J*.

Într-adevăr, să presupunem că avem relația

$\lambda_0 e^{rx} + \lambda_1 x e^{rx} + \ldots + \lambda_{p+1} x^p e^{rx} = 0$, $\forall\ x \in J$. Atunci rezultă

$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{p+1} x^p = 0$, $\forall\ x \in J$, deci $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p+1} = 0$.

Exemplul 7.3.2 Să se afle soluția generală a ecuației $y'' - 6y' + 9y = 0$. Ecuația caracteristică este $r^2 - 6r + 9 = 0$, care admite rădăcina dublă $r_1 = r_2 = 3$.

Ecuația diferențială va admite soluțiile particulare $y_1 = e^{3x}$ și $y_2 = xe^{3x}$, care sunt liniar independente.

Soluția generală va fi $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Cazul 3. Ecuația caracteristică admite rădăcina complexă simplă $r = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

Vom arăta în acest caz, că ecuația diferențială admite soluțiile particulare $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ și $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Definiția 7.3.3 *Dacă u,v* : $J \to$ P *sunt derivabile pe intervalul J și f* : $J \to \leq$ *este funcția complexă definită astfel:* $f(x) = u(x) + iv(x)$, $\forall\ x \in J$, *atunci prin definiție,* $f'(x) = u'(x) + i\,v'(x)$, $\forall\ x \in J$.

(În mod analog se poate defini derivata de orice ordin a funcției *f*).

Lema 7.3.2 *Dacă f = u + iv este soluție pentru ecuația diferențială omogenă* (*25*)*, atunci u și v sunt de asemenea soluții pentru ecuația* (*25*).

Demonstrație. Prezentăm demonstrația pentru cazul particular $n = 2$. Dacă $f = u + iv$ este soluția pentru ecuația (25), atunci avem:

$$a_0\left[u(x)+i\,v(x)\right]''+a_1\left[u(x)+i\,v(x)\right]'+a_2\left[u(x)+v(x)\right]=0,\ \forall\ x\in J .$$

Efectuând calculele rezultă că:

$$\left[a_0u''(x)+a_1u'(x)+a_2u(x)\right]+i\left[a_0v''(x)+a_1v'(x)+a_2v(x)\right]=0,\ \forall\ x\in J$$

și mai departe că:

$$a_0u''(x)+a_1u'(x)+a_2u(x)=0$$

$$a_0v''(x)+a_1v'(x)+a_2v(x)=0,\ \forall\ x\in J,$$

deci u și v sunt soluții pentru ecuația (25).

Fie $r=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$ o rădăcină complexă a ecuației caracteristice (27). Atunci $y=e^{(\alpha+i\beta)x}$ este o soluție (complexă) a ecuației diferențiale (25).

Din formulele lui Euler (Vezi [10], 3.2.1) rezultă că:

$y=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)=e^{\alpha x}\cos\beta x+i\,e^{\alpha x}\sin\beta x$, iar din Lema 7.3.2 că $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ și $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ sunt soluții (reale) ale ecuației (25). Pe de altă parte este evident că y_1 și y_2 sunt liniar independente.

Exemplul 7.3.3 Să se afle soluția generală a ecuației: $y''-2y'+5y=0$. Ecuația caracteristică este $r^2-2r+5=0$ și are rădăcinile $r_{1,2}=1\pm 2i$. Rezultă că ecuația diferențială admite soluțiile particulare $y_1=e^x\cos 2x$ și $y_2=e^x\sin 2x$.

Soluția generală este $y=C_1e^x\cos 2x+C_2e^x\sin 2x$.

Exemplul 7.3.4 Să se afle soluția generală a ecuației:

$$y^{VII}-y^{V}-2y^{IV}-5y'''-4y''-3y'-2y=0.$$

Ecuația caracteristică este

$$r^7-r^5-2r^4-5r^3-4r^2-3r-2=0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt:

$$r_1=r_2=-1,\ r_3=2;\ r_4=r_5=i,\ r_6=r_7=-i.$$

Ecuația admite următoarele soluții particulare: $y_1=e^{-x}$, $y_2=xe^{-x}$, $y_3=e^{2x}$, $y_4=\cos x$, $y_5=x\cos x$, $y_6=\sin x$, $y_7=x\sin x$. Aceste soluții sunt liniar independente. Soluția generală este $y=\sum_{i=1}^{7}C_iy_i$, $C_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,7}$.

Aşa cum am văzut în Observația 7.3.4, dacă cunoaştem soluția generală a ecuației omogene, cu metoda variației constantelor putem afla şi soluția generală a ecuației neomogene.

Exemplul 7.3.5 Să se afle soluția generală a ecuației $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Ecuația omogenă asociată $y'' + y = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_{1,2} = \pm i$ $\left(\alpha = 0, \beta = 1\right)$. Soluția generală a ecuației omogene este:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{28}$$

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene de forma:

$y = \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x$.

Funcțiile φ_1' şi φ_2' verifică sistemul

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)\cos x + \varphi_2'(x)\sin x = 0 \\ -\varphi_1'(x)\sin x + \varphi_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem

$$\varphi_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x},\ \varphi_2'(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

În continuare avem:

$$\varphi_1(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\frac{1}{\cos x} + C_1$$

$$\varphi_2(x) = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C_2.$$

Înlocuind în (28) obținem soluția generală a ecuației neomogene:

$$y = C_1\cos x + C_2 \sin x - 1 + \frac{1}{2}\left(\sin x\right)\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Metoda variației constantelor este laborioasă (presupune rezolvarea unui sistem de ecuații liniare şi apoi calculul unor primitive). În anumite situații, când membrul drept al ecuației neomogene este de forme particulare, se procedează altfel pentru rezolvarea ecuației neomogene. În continuare descriem această metodă. Să presupunem că membrul drept al ecuației neomogene este de forma:

$$f(x) = e^{\lambda x}\left[P_1(x)\cos \mu x + P_2(x)\sin \mu x\right] \tag{29}$$

unde P_1 şi P_2 sunt funcții polinomiale.

Cazul 1. Dacă $\lambda + i\mu$ nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică (27), se caută o soluție particulară a ecuației neomogene (1) de forma:

$$y_p = e^{\lambda x}\left[Q_1(x)\cos\mu x + Q_2(x)\sin\mu x\right] \tag{30}$$

unde $\operatorname{gr} Q_1 = \operatorname{gr} Q_2 = \max\left(\operatorname{gr} P_1, \operatorname{gr} P_2\right)$. Se pune condiția ca funcția definită în (30) să verifice ecuația neomogenă şi se determină funcțiile polinomiale Q_1 şi Q_2.

Acest caz se mai numeşte şi cazul fără rezonanță.

Cazul 2 (cu rezonanță) Dacă $\lambda + i\mu$ este rădăcină a ecuației caracteristice (27) şi are ordinul de multiplicitate *m*, atunci se caută o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = x^m e^{\lambda x}\left[Q_1(x)\cos\mu x + Q_2(x)\sin\mu x\right] \tag{31}$$

şi în continuare se procedează ca în Cazul 1.

Exemplul 7.3.6 Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' - 3y' + 2y = 5e^{-x} \tag{32}$$

Ecuația omogenă este $y'' - 3y' + 2y = 0$ şi are ecuația caracteristică $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$. Soluția generală a ecuației omogene este $y_0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Membrul drept este de forma (29) şi anume $\lambda = -1$, $\mu = 0$, $P_1(x) = 5$, $P_2(x) = 0$.

$\lambda + i\mu = -1$ nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică. Atunci căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = a e^{-x} \tag{33}$$

Punând condiția ca (33) să verifice ecuația (32) obținem:

$a e^{-x} + 3a e^{-x} + 2a e^{-x} = 5e^{-x}$, de unde rezultă $a = \frac{5}{6}$ şi $y_p = \frac{5}{6}e^{-x}$.

Soluția generală a ecuației (32) este $y = y_0 + y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{5}{6}e^{-x}$.

Exemplul 7.3.7

$$y'' - 3y' + 2y = 8e^{2x} \tag{34}$$

În acest caz $\lambda = 2$, $\mu = 0$, $P_1 = 8$; $P_2 = 0$.

Observăm că avem rezonanță, deoarece $\lambda + i\mu = 2$ este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică. Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = x \cdot a e^{2x},\ a \in \mathrm{P}. \tag{35}$$

Punând condiția ca (35) să verifice (34) obținem:

$\left(4a + 4ax - 2a - 6ax + 2ax\right)e^{2x} = 8e^{2x}$.

Rezultă $a = 8$ şi $y_p = 8x e^{2x}$. Soluția generală este: $y = C_1e^x + C_2 e^{2x} + 8x e^{2x}$.

Exemplul 7.3.8

$$y'' - 3y' + 2y = 2\cos x \tag{36}$$

Avem: $\lambda = 0$; $\mu = 1$, $P_1 = 2$, $P_2 = 0$.

$\lambda + i\mu = i$ nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică. Căutăm soluția particulară y_p de forma

$$y_p = e^{0x}\left(a\cos x + b\sin x\right) = a\cos x + b\sin x \tag{37}$$

Punând condiția ca (37) să verifice (36) obținem:

$\left(a - 3b\right)\cos x + \left(3a + b\right)\sin x = 2\cos x$.

Rezultă

$\begin{cases} a - 3b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$ şi mai departe $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$, $y_p = \frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x$.

Soluția generală a ecuației (36) este

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x$.

Exemplul 7.3.9

$$y'' + y = 3\sin x \tag{38}$$

Ecuația omogenă $y'' + y = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$. Soluția generală a ecuației omogene este $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. (Vezi exemplul 7.3.5).

$\lambda = 0$, $\mu = 1$; $\lambda + i\mu = i$ este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică (avem rezonanța). Alegem

$$y_p = x\left(a\cos x + b\sin x\right) \tag{39}$$

Punând condiția ca y_p să verifice ecuația (38) obținem:

$-2a\sin x + 2b\cos x = 3\sin x$ şi mai departe $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$, $y_p = -\frac{3}{2}x\cos x$.

Soluția generală a ecuației (38) este $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x$.

În încheierea acestui paragraf prezentăm ecuațiile de tip Euler, care sunt ecuații cu coeficienți variabili.

Vom arăta că dacă facem schimbarea de variabilă $x = e^t$, ecuațiile Euler devin ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

O ecuație Euler este de forma:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{40}$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$ sunt constante.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x = e^t \tag{41}$$

şi notăm cu $z(t)=y\left(e^t\right)$, atunci avem:

$z'(t)=y'\left(e^t\right)\cdot e^t$, deci $y'\left(e^t\right)=e^{-t}z(t)$.

Derivând în continuare obținem:

$z''(t)=y''\left(e^t\right)\cdot e^{2t}+y'\left(e^t\right)\cdot e^t=y''\left(e^t\right)\cdot e^{2t}+z'(t)$, deci

$y''\left(e^t\right)=e^{-2t}\left(z''(t)-z'(t)\right)$

$z'''(t)=y'''\left(e^t\right)\cdot e^{3t}+y''\left(e^t\right)\cdot 2e^{2t}+z''(t)=y'''\left(e^t\right)\cdot e^{3t}+2\left(z''(t)-z'(t)\right)+z''(t)$

Aşadar, avem

$y'''\left(e^t\right)=e^{-3t}\left(z'''(t)-3z''(t)+2z'(t)\right)$ etc.

În general

$$y^{(k)}\left(e^t\right)=e^{-kt}\left(z^{(k)}(t)+b_1z^{(k-1)}(t)+\ldots+b_kz'(t)\right). \tag{42}$$

Înlocuind (42) în (40) obținem o ecuație cu coeficienți constanți în necunoscuta $z=z(t)$.

Exemplul 7.3.10

$$x^2y''-xy'+y=\ln x. \tag{43}$$

În urma schimbării de variabilă $x=e^t$, ecuația devine

$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(z''-z'\right)-e^t\cdot e^{-t}\cdot z'+z=t$ sau

$$z''-2z'+z=t \tag{44}$$

Ecuația omogenă $z''-2z'+z=0$ are ecuația caracteristică $r^2-2r+1=0$, care admite rădăcina dublă $r_1=r_2=t$.

Soluția generală a ecuației omogene este:

$$z_0=C_1e^t+C_2te^t \tag{45}$$

Deoarece nu avem rezonanță, căutăm o soluție particulară a membrului drept de forma:

$$y_p=at+b \tag{46}$$

Punând condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (44), rezultă a = 1, b = 2, deci $y_p=t+2$.

Soluția generală a ecuației neomogene (44) este $z=C_1e^t+C_2te^t+t+2$. Înlocuind $t=\ln x$, obținem soluția generală a ecuației (43):

$y=C_1x+C_2x\ln x+\ln x+2$.

7.4 SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE. TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Prin sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi sub formă normală, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, \dots, y_n\right) \\ \text{-------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = f_n\left(x, y_1, \dots, y_n\right) \end{cases} \tag{1}$$

unde $f_1, \dots, f_n$ sunt funcții continue definite pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definiția 7.4.1 *Se numeşte soluție a sistemului* (*1*) *orice set de n-funcții* $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ *(* $I \subset \mathbb{R}$ *interval deschis),* $\varphi_i \in C^1(I)$, $i = \overline{1,n}$ *cu proprietatea*

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(x)}{dx} = f_1\left[x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right] \\ \text{-------------------} \\ \dfrac{d\varphi_n(x)}{dx} = f_n\left[x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right] \end{cases}, \quad \forall\, x \in I.$$

(Se subînțelege că am presupus că $\left(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right) \in D$, $\forall\; x \in I$).

În general, un sistem de ecuații diferențiale admite o infinitate de soluții. Pentru a selecta o anumită soluție se impun condiții inițiale.

Definiția 7.4.2 *Fie* $M_0\left(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}\right)$ *un punct oarecare din D fixat. Se numeşte problema Cauchy pentru sistemul* (*1*)*, problema determinării unei soluții a acestui sistem,* $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$*, care verifică condiția inițială:*

$$\varphi_1\left(x_0\right) = y_{10}, \dots, \varphi_n\left(x_0\right) = y_{n0} \tag{2}$$

Dacă adoptăm scrierea vectorială: $y = \left(y_1, \dots, y_n\right)$, $f = \left(f_1, \dots, f_n\right)$, $\varphi = \left(\varphi_1, \dots, \varphi_n\right)$, $y_0 = \left(y_{10}, \dots, y_{n0}\right)$, sistemul (4) se scrie

$$y' = f\left(x, y\right) \tag{1'}$$

iar problema Cauchy constă în determinarea unei funcții vectoriale $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(I)$ cu proprietățile:

$$\left(x, \varphi(x)\right) \in D,\ \forall\ x \in I,\ \varphi'(x) = f\left[x, \varphi(x)\right],\ \forall\ x \in I,\ \varphi\left(x_0\right) = y_0. \tag{2'}$$

Definiția 7.4.3 *O funcție* $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ *este lipschitziană pe D, în raport cu* $y_1, \dots, y_n$*, dacă există o constantă* $L > 0$ *astfel încât*

$\left|f(x,y_1,\dots,y_n)-f(x,z_1,\dots,z_n)\right|\le L\sum_{j=1}^{n}\left|y_j-z_j\right|$, oricare ar fi punctele $(x,y_1,\dots,y_n)$ şi $(x,z_1,\dots,z_n)$ din D.

Observația 7.4.1 Dacă D este o mulțime deschisă şi convexă, $f\in C^1(D)$ şi există $M>0$ astfel încât $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y_1,\dots,y_n)\right|\le M$, $\forall\ (x,y_1,\dots,y_n)\in D$ şi $\forall\ i=\overline{1,n}$, atunci f este lipschitziană pe D.

Într-adevăr, din teorema creşterilor finite a lui Lagrange, rezultă că oricare ar fi $P(x,y_1,\dots,y_n)\in D$ şi oricare ar fi $Q(x,z_1,\dots,z_n)\in D$ există un punct $(x,\xi_1,\dots,\xi_n)$ pe segmentul de dreaptă deschis, de capete P şi Q astfel încât

$$f(x,y_1,\dots,y_n)-f(x,z_1,\dots,z_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\xi_1,\dots,\xi_n)(y_j-z_j).$$

În continuare avem:

$$\left|f(x,y_1,\dots,y_n)-f(x,z_1,\dots,z_n)\right|\le\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\xi_1,\dots,\xi_n)\right|\left|(y_j-z_j)\right|\le$$

$$\le M\sum_{j=1}^{n}\left|(y_j-z_j)\right|,$$

deci f este lipschitziană pe D.

Teorema 7.4.1 (Teorema de existență şi unicitate pentru sisteme)

Fie $M_0(x_0,y_{10},\dots,y_{n0})\in\mathbb{R}^{n+1}$, $a,b_i>0$, $i=\overline{1,n}$ şi $D=(x_0-a,\,x_0+a)\times\Delta$, unde $\Delta=\prod_{j=1}^{n}(y_{j0}-b_j,\,y_{j0}+b_j)=(y_{10}-b_1,\,y_{10}+b_1)\times\dots\times(y_{n0}-b_n,\,y_{n0}+b_n)$.

Dacă $f_i:\overline{D}\to\mathbb{R}$ este continuă şi lipschitziană pe $\overline{D}$, oricare ar fi $i=\overline{1,n}$, atunci există o soluție unică a sistemului (1): $y_1=\varphi_1(x),\dots,y_n=\varphi_n(x)$, $x\in I\subset(x_0-a,\,x_0+a)$ cu proprietatea: $\varphi_1(x_0)=y_{10},\dots,\varphi_n(x_0)=y_{n0}$.
(Cu alte cuvinte, în condiții precizate, problema Cauchy (1)+(2) are soluție unică).

Demonstrație. Deoarece f_i este continuă pe mulțimea compactă $\overline{D}$, rezultă că este mărginită pe $\overline{D}$. Fie $M_i>0$ marginea superioară a funcției f_i pe $\overline{D}$ şi fie $M=\max\{M_1,\dots,M_n\}$. Fie de asemenea $L=\max\{L_1,\dots,L_n\}$, unde $L_i>0$ este constanta Lipschitz a funcției f_i pe $\overline{D}$, $i=\overline{1,n}$. Fie $\alpha\in(0,1)$ oarecare şi fie $h=\min\left(a,\frac{b_1}{M},\dots,\frac{b_n}{M},\frac{\alpha}{nL}\right)$. Notăm cu $I=(x_0-h,\,x_0+h)$. Evident,

$I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$. Procedând ca în demonstrația Lemei 7.1.1, se arată că rezolvarea problemei Cauchy (1)+(2) este echivalentă cu rezolvarea următorului sistem de ecuații integrale:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1\left[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\right] \mathrm{d}t \\ ------------------------------ \\ y_n(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n\left[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\right] \mathrm{d}t \ , \ x \in I \end{cases} \tag{3}$$

Rezultă că dacă arătăm că sistemul (4) are soluție unică, atunci teorema este demonstrată.

Fie $\mathcal{F} = \left\{ G = (g_1, \ldots, g_n) : I \to \Delta;\, G - \text{continuă pe } I \right\}$ și fie $d(G,H) = \max\limits_{1 \le i \le n} \sup\left\{ \left| g_i(x) - h_i(x) \right|; x \in I \right\}$, oricare ar fi funcțiile $G = (g_1, \ldots, g_n)$ și $H = (h_1, \ldots, h_n)$ din $\mathcal{F}$. Se arată, ca și în demonstrația Teoremei 7.1.1, că $(\mathcal{F}, d)$ este un spațiu metric complet. În continuare, pentru orice $G \in \mathcal{F}$ și orice $x \in I$, notăm cu $T_i(G)(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left[t, g_1(t), \ldots, g_n(t)\right] \mathrm{d}t$ și cu $T = (T_1, \ldots, T_n)$. Pentru început vom arăta că $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Într-adevăr, pentru orice $x \in I$, avem:

$$\left| T_i(G)(x) - y_{i0} \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} f_i\left[t, g_1(t), \ldots, g_n(t)\right] \mathrm{d}t \right| \le M \left| \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \right| = M(x - x_0) \le$$

$$\le Mh \le M \cdot \frac{b_i}{M} = b_i .$$

Rezultă că $T(G)(x) = \left(T_1(G)(x), \ldots, T_n(G)(x)\right) \in \Delta$, $\forall\ x \in I$. Cum $T(G)$ este evident continuă pe I, rezultă că $T(G) \in \mathcal{F}$.

În continuare vom arăta că T este o contracție pe $\mathcal{F}$. Pentru aceasta, fie $G, H \in \mathcal{F}$, $x \in I$ și $i = \overline{1,n}$. Atunci

$$\left| T_i(G)(x) - T_i(H)(x) \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, g_1(t), \ldots, g_n(t)\right) - f_i\left(t, h_1(t), \ldots, h_n(t)\right) \right| \mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} L_i \sum_{j=1}^{n} \left| g_j(t) - h_j(t) \right| \mathrm{d}t \right| \le nL\, d(G,H) \left| \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \right| \le nL d(G,H) h \le$$

$$\le nL d(G,h) \frac{\alpha}{nL} = \alpha d(G,h) .$$

Rezultă că

$$d\left(T(G), T(H)\right) = \max_{1 \le i \le n} \sup\left\{ \left| T_i(G)(x) - T_i(H)(x) \right|; x \in I \right\} \le$$

$$\le \alpha d(G,H) .$$

Cum $\alpha \in (0,1)$, deducem că T este o contracție pe $\mathcal{F}$. Din Teorema de punct fix a lui Banach, rezultă că există $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{F}$, unică, cu proprietatea: $T(\Phi) = \Phi$, relație vectorială echivalentă cu:

$$y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]\mathrm{d}t = \varphi_i(t),\ \forall\ t \in I,\ \forall\ i = \overline{1,n}.$$

Așadar, am arătat că $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : I \to \Delta$ este soluția unică a sistemului (3) și cu aceasta teorema este demonstrată.

Definiția 7.4.4 *Prin ecuație diferențială de ordinul n, sub formă normală, înțelegem o ecuație diferențială de forma:*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{4}$$

unde f este o funcție continuă definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $y = y(x)$ este funcția necunoscută iar $y^{(k)}$ este derivata de ordinul k a lui y, $k = \overline{1, n-1}$.

Prin soluție a ecuației (4) se înțelege orice funcție $y = \varphi(x)$, $x \in I$, $\varphi \in C^{(n-1)}(I)$ cu proprietățile:

$$\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \in D,\ \forall\ x \in I \quad \text{și}$$

$$\varphi^{(n)}(x) = f\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right],\ \forall\ x \in I.$$

Fie $M_0\left(x_0, y_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}\right) \in D$ un punct oarecare fixat. Problema Cauchy pentru ecuația (4) și punctul M_0 constă în determinarea unei soluții: $y = \varphi(x)$, $x \in I$ a ecuației (4) care îndeplinește condițiile:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_{10}, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \tag{5}$$

Teorema 7.4.2 *Fie*

$D = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b_0, y_0 + b_0) \times \prod_{j=1}^{n-1} (y_{j0} - b_j, y_{j0} + b_j)$ *un paralelipiped cu centrul în* $M_0\left(x_0, y_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}\right) \in D$. *Presupunem că* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *este continuă și lipschitziană în raport cu toate argumentele, mai puțin x.*

În aceste condiții, problema Cauchy (4)+(5) are soluție unică.

Demonstrație.

Dacă introducem notațiile:

$$y_1 = y',\ y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)} \tag{6}$$

atunci ecuația (4) se înlocuiește cu următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \text{-------------------} \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f\left(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}\right) \end{cases} \tag{7}$$

Cum sistemul (7) verifică condițiile din Teorema 7.3.1, rezultă că există o soluție unică a sistemului (7):

$$y = \varphi(x)\,,\ y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x)\,,\ x \in I \tag{8}$$

care verifică condiția inițială

$$\varphi\left(x_0\right) = y_0\,,\ \varphi_1\left(x_0\right) = y_{10}, \ldots, \varphi_{n-1}\left(x_0\right) = y_{n-1,0} \tag{9}$$

Dacă ținem seama de notațiile (6) și de faptul că (8) este soluție pentru sistemul (7) obținem: $\varphi^{(n)}(x) = f\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right]$, $\forall\ x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție pentru ecuația (4). Pe de altă parte din (6) și (9) rezultă că $\varphi\left(x_0\right) = y_0$, $\varphi'\left(x_0\right) = y_{10}, \ldots, \varphi^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_{n-1,0}$. Așadar, $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție unică pentru problema Cauchy (4)+(5).

Exemplul 7.4.1 Să se rezolve problema Cauchy
$y'' + y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Soluția generală a ecuației este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$. Din condițiile inițiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ rezultă $C_1 = 1$ și $C_2 = 2$. Soluția problemei Cauchy este $y = \cos x + 2 \sin x + x$.

7.5 SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE

Un sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi este de forma următoare:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x) y_1 + \ldots + a_{1n}(x) y_n + b_1(x) \\ \text{-------------------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = a_{n1}(x) y_1 + \ldots + a_{nn}(x) y_n + b_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

unde a_{ij} și b_i sunt funcții continue definite pe un interval $I = (a, b) \subset$ P.

Sistemul omogen asociat sistemului (1) este:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ ------------------- \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{2}$$

Dacă introducem notaţiile vectoriale:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ ----- \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemul (1) devine

$$\frac{dY}{dx} = AY + b \tag{1'}$$

iar sistemul (2)

$$\frac{dY}{dx} = AY \tag{2'}$$

Observaţia 7.5.1 Dacă notăm cu $f_i(x) = a_{i1}(x)y_1 + \ldots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$, $\forall\, x \in I$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, atunci $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x)$. Fie $x_0 \in (a,b) = I$ şi fie $J \subset I$ un interval închis care conţine punctul x_0. Deoarece funcţiile a_{ij} şi b_i sunt continue pe *I*, rezultă că aceste funcţii sunt mărginite pe *J*. Din Observaţia 7.3.1 rezultă că funcţiile f_i sunt lipschitziene în raport cu $y_1,\ldots,y_n$ pe domeniul $J \times \mathbb{R}^n$. Rezultă că pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(x_0, y_{10},\ldots,y_{n0}) \in J \times \mathbb{R}^n$, Teorema 7.3.1 de existenţă şi unicitate este valabilă. De fapt, se poate demonstra mai mult, că oricare ar fi $a < x_0 < b$ şi oricare ar fi $y_0 = (y_{10},\ldots,y_{n0}) \in \mathbb{R}^n$, există o soluţie unică a sistemului liniar (1): $y_1 = \varphi_1(x),\ldots,y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ care verifică condiţia iniţială $\varphi_1(x_0) = y_{10},\ldots,\varphi_n(x_0) = y_{n0}$.

În continuare vom studia sistemul omogen (2).

Propoziţia 7.5.1 *Dacă* Y_1 *şi* Y_2 *sunt soluţii ale sistemului omogen* (2)*, atunci* $\forall\ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$*, rezultă că* $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ *este de asemenea soluţie pentru* (2)*.*

Demonstraţie. Deoarece operaţia de derivare este liniară rezultă:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = \alpha_1 \frac{dY_1}{dx} + \alpha_2 \frac{dY_2}{dx} = \alpha_1 AY_1 + \alpha_2 AY_2 = A(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2).$$

Dacă notăm cu *S* mulţimea soluţiilor sistemului omogen (2) din Propoziţia 7.5.1, rezultă că *S* este un spaţiu vectorial real.

Definiția 7.5.1 *Fie* $Y=\begin{pmatrix} y_{11}\\ \vdots \\ y_{n1}\end{pmatrix},\dots,Y_n=\begin{pmatrix} y_{1n}\\ \vdots \\ y_{nn}\end{pmatrix}$ *n-soluții particulare ale sistemului omogen* (*2*)*. Se numește wronskianul acestor soluții, următorul determinant:*

$$W(x)=W\left[Y_1,\dots,Y_n\right](x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x)\\ \hline y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x)\end{vmatrix},\ x\in I .$$

Propoziția 7.5.2 *Dacă* $Y_1,\dots,Y_n$ *sunt n-soluții particulare ale sistemului* (2)*, liniar dependente pe I, atunci* $W(x)=0,\ \forall\ x\in I$ *.*

Demonstrație. Prin ipoteză, există $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât: $\alpha_1Y_1(x)+\ldots+\alpha_nY_n(x)=0$, $\forall\ x\in I$, relație echivalentă cu:

$$\begin{cases}\alpha_1y_{11}(x)+\ldots+\alpha_ny_{1n}(x)=0\\ \text{-------------------}\\ \alpha_1y_{n1}(x)+\ldots+\alpha_ny_{nn}(x)=0,\ \ \forall\ x\in I\end{cases}\tag{3}$$

Deoarece (3) este un sistem (algebric) liniar și omogen, care admite soluție nebanală, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Dar, determinantul coeficienților este chiar wronskianul soluțiilor $Y_1,\dots,Y_n$.

Așadar, $W\left(Y_1,\dots,Y_n\right)(x)=0$, $\forall\ x\in I$.

Teorema 7.5.1 (Liouville)

Fie $Y_1,\dots,Y_n$*, n-soluții particulare ale sistemului omogen* (2) *și fie* $x_0\in I$ *oarecare fixat. Atunci,* $\forall\ x\in I$ *avem:*

$$W(x)=W\left(x_0\right)e^{\int_{x_0}^{x}\left[a_{11}(t)+\ldots+a_{nn}(t)\right]\mathrm{d}t}\tag{4}$$

Demonstrație.

Pentru simplificarea scrierii, considerăm cazul particular n = 2. Fie deci $Y_1=\begin{pmatrix} y_{11}\\ y_{21}\end{pmatrix}$ și $y_2=\begin{pmatrix} y_{12}\\ y_{22}\end{pmatrix}$ soluții particulare pentru (2). Wronskianul acestor soluții este: $W(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}$, $x\in I$.

Deoarece Y_1 și Y_2 sunt soluții pentru sistemul (2) avem:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_{11}}{dx}=a_{11}\,y_{11}+a_{12}\,y_{21}\\[2mm] \dfrac{dy_{21}}{dx}=a_{21}\,y_{11}+a_{22}\,y_{21}\end{cases}\quad \text{și}\quad \begin{cases}\dfrac{dy_{12}}{dx}=a_{11}\,y_{12}+a_{12}\,y_{22}\\[2mm] \dfrac{dy_{22}}{dx}=a_{21}\,y_{12}+a_{22}\,y_{22}\end{cases}\tag{5}$$

Ținând seama de modul de derivare al unui determinant, de identitățile (5) şi de proprietățile determinanților, rezultă:

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix}\frac{dy_{11}}{dx} & \frac{dy_{12}}{dx}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ \frac{dy_{21}}{dx} & \frac{dy_{22}}{dx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}y_{11}+a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12}+a_{12}y_{22}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ a_{11}y_{11}+a_{22}y_{21} & a_{21}y_{12}+a_{22}y_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ a_{22}y_{21} & a_{22}y_{22}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_{11}+a_{22}\right)\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}.$$

Aşadar, avem

$$\frac{dW}{dx}=\left[a_{11}(x)+a_{22}(x)\right]W(x)\,,\quad x\in I \tag{6}$$

Observăm că (6) este o ecuație diferențială liniară şi omogenă de ordinul întâi. Soluția sa generală este: $W(x)=C\cdot e^{\int_{x0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)]\mathrm{d}t}$, $x\in I$, unde $C\in$ P este o constantă arbitrară. Deoarece $W\left(x_0\right)=C$, rezultă:

$$W(x)=W\left(x_0\right)\,e^{\int_{x0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)]\mathrm{d}t}\,,\ x\in I\,.$$

Definiția 7.5.2 *Se numeşte sistem fundamental de soluții ale sistemului omogen* (2)*, orice set de n soluții particulare ale acestui sistem,* $Y_1,\ldots,Y_n$*, cu proprietatea că există* $x_0\in I$*, astfel încât* $W\left[Y_1,\ldots,Y_n\right]\left(x_0\right)\neq 0$.

Corolarul 7.5.1 *Dacă* $Y_1,\ldots,Y_n$ *este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen* (2)*, atunci* $W\left[Y_1,\ldots,Y_n\right](x)\neq 0$, $\forall\ x\in I$.

Afirmația rezultă din Teorema Liouville.

Observația 7.5.2 Din Propoziția 7.5.2 şi Corolarul 7.5.1, rezultă că dacă $Y_1,\ldots,Y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (2), atunci $Y_1,\ldots,Y_n$ sunt liniar independente pe intervalul *I*.

Teorema 7.5.2 *Dacă* $Y_1,\ldots,Y_n$ *este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen* (2)*, atunci oricare ar fi Y soluție a acestui sistem, există* $C_1,\ldots,C_n\in\square$ *astfel încât* $Y=C_1Y_1+\ldots+C_nY_n$.

Demonstrație.

Fie $Y_1=\begin{pmatrix}y_{11}\\ \vdots\\ y_{n1}\end{pmatrix},\ldots,\ Y_n=\begin{pmatrix}y_{1n}\\ \vdots\\ y_{nn}\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ şi $x_0\in I$ oarecare fixat.

Considerăm următorul sistem

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0)+\ldots+\alpha_n y_{1n}(x_0)=y_1(x_0) \\ \text{-------------------------} \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0)+\ldots+\alpha_n y_{nn}(x_0)=y_n(x_0) \end{cases} \tag{7}$$

Deoarece determinantul coeficienților sistemului (7) este chiar wronskianul soluțiilor $Y_1,\ldots,Y_n$ şi acesta este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (7) admite soluție unică. Fie $C_1,C_2,\ldots,C_n$ soluția unică a sistemului (7) şi fie $Z=C_1Y_1+\ldots+C_nY_n$. Din Propoziția 7.5.1 rezultă că Z este soluție pentru sistemul omogen (2). Pe de altă parte, observăm că $Z(x_0)=Y(x_0)$. Din Teorema de existență şi unicitate rezultă că $Z=Y$, deci $Y=C_1Y_1+\ldots+C_nY_n$.

Observația 7.5.3 Din Teorema 7.5.2 rezultă că dacă cunoaştem n-soluții particulare ale sistemului omogen (2), $Y_1,\ldots,Y_n$ şi acestea formează un sistem fundamental de soluții, atunci soluția generală a sistemului omogen este:

$$Y=C_1Y_1+\ldots+C_nY_n \tag{8}$$

unde $C_1,\ldots,C_n$ sunt constante arbitrare.

În continuare, prezentăm metoda variației constantelor a lui Lagrange pentru rezolvarea sistemelor neomogene. Pentru simplificarea scrierii considerăm cazul particular $n=2$. Fie deci următorul sistem neomogen:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}\,y_1+a_{12}\,y_2+b_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=a_{21}\,y_1+a_{22}\,y_2+b_2 \end{cases} \tag{9}$$

Fie de asemenea $Y_1=\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$ şi $Y_2=\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen asociat. Atunci avem:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{11}}{dx}=a_{11}\,y_{11}+a_{12}\,y_{21} \\ \dfrac{dy_{21}}{dx}=a_{21}\,y_{11}+a_{22}\,y_{21} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{dy_{12}}{dx}=a_{11}\,y_{12}+a_{12}\,y_{22} \\ \dfrac{dy_{22}}{dx}=a_{21}\,y_{12}+a_{22}\,y_{22} \end{cases} \tag{10}$$

Din Observația 7.5.3 deducem că soluția generală a sistemului omogen este

$$\begin{cases} y_{10}=C_1\,y_{11}+C_2\,y_{12} \\ y_{20}=C_1\,y_{21}+C_2\,y_{22}\ , \quad C_1,C_2\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{11}$$

Căutăm soluția sistemului neomogen (9) de forma

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x)\,y_{11}+\varphi_2(x)\,y_{12} \\ y_2=\varphi_1(x)\,y_{21}+\varphi_2(x)\,y_{22} \end{cases} \tag{12}$$

Punând condiția ca (12) să verifice sistemul (9) obținem:

$$\begin{cases} \varphi_1' y_{11} + \varphi_2' y_{12} + \varphi_1 y_{11}' + \varphi_2 y_{12}' = a_{11}\left(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}\right) + a_{12}\left(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}\right) + b_1 \\ \varphi_1' y_{21} + \varphi_2' y_{22} + \varphi_1 y_{21}' + \varphi_2 y_{22}' = a_{12}\left(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}\right) + a_{22}\left(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}\right) + b_2 \end{cases}$$

Ținând seama de identitățile (10) rezultă

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_{11} + \varphi_2'(x) y_{12} = b_1(x) \\ \varphi_1'(x) y_{21} + \varphi_2'(x) y_{22} = b_2(x), \qquad x \in I. \end{cases} \tag{13}$$

Deoarece determinantul coeficienților este chiar wronkianul soluției Y_1, Y_2 și acesta este diferit de zero pe *I*, rezultă că sistemul (13) are soluție unică.

Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x)$ și $\varphi_2'(x) = g_2(x)$, $x \in I$, soluția unică a sistemului (13). Integrând, obținem:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \int g_1(x)\,dx + C_1 \\ \varphi_2(x) = \int g_2(x)\,dx + C_2 \end{cases} \tag{14}$$

În sfârșit, înlocuind (14) în (12) obținem soluția generală a sistemului neomogen (9), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + y_{11} \int g_1(x)\,dx + y_{12} \int g_2(x)\,dx \\ y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + y_{21} \int g_1(x)\,dx + y_{22} \int g_2(x)\,dx \end{cases} \tag{15}$$

Dacă notăm cu:

$$\begin{cases} y_{1p} = y_{11} \int g_1(x)\,dx + y_{12} \int g_2(x)\,dx \\ y_{2p} = y_{21} \int g_1(x)\,dx + y_{22} \int g_2(x)\,dx \end{cases}$$ și cu $Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$, $Y_p = \begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix}$ atunci soluția

generală a sistemului neomogen (9) este de forma

$$Y = Y_0 + Y_p \tag{15'}$$

unde Y_0 este soluția generală a sistemului omogen, iar Y_p este o soluție particulară a sistemului neomogen.

Observația 7.5.4 În principiu, rezolvarea sistemului neomogen este întotdeauna posibilă dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Într-adevăr, fie $Y_1, \ldots, Y_n$ un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Atunci

$$Y_0 = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \tag{16}$$

este soluția generală a sistemului omogen.

Căutăm soluția generală a sistemului neomogen de forma:

$$Y = \varphi_1(x) Y_1 + \ldots + \varphi_n(x) Y_n \tag{17}$$

Funcțiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se determină astfel:

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)y_{11} + \ldots + \varphi_n'(x)y_{1n} = b_1(x) \\ \text{-----------------------} \\ \varphi_1'(x)y_{n1} + \ldots + \varphi_n'(x)y_{nn} = b_n(x) \end{cases} \tag{18}$$

Sistemul (18) are soluție unică. Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x), \ldots, \varphi_n'(x) = g_n(x)$ soluția acestui sistem. Integrând, găsim:

$$\varphi_1(x) = \int g_1(x)\,dx + C_1, \ldots, \varphi_n(x) = \int g_n(x)\,dx + C_n \tag{19}$$

Înlocuind (19) în (17) se obține soluția generală a sistemului neomogen.

Din păcate, pentru sisteme cu coeficienți variabili este dificil de aflat un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Acest lucru este posibil în cazul sistemelor cu coeficienți constanți. În continuare vom studia astfel de sisteme. Fie sistemul:

$$\frac{dY}{dx} = AY \tag{20}$$

unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ este o matrice constantă (a_{ij} sunt constante reale).

Reamintim că, prin definiție, derivata unei matrice ale cărei elemente sunt funcții derivabile, este matricea formată cu derivatele acestor elemente. Aşadar,

$$\begin{pmatrix} f_{11}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ f_{n1}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}' \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f'_{11}(x) & \ldots & f'_{1n}(x) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ f'_{n1}(x) & \ldots & f'_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I,$$ dacă $f_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, $\forall \; i, j = \overline{1, n}$.

În particular $(Ax)' = A$.

Prin inducție matematică se demonstrează imediat că

$\left[(Ax)^k\right]' = k \cdot A(Ax)^{k-1}$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Cum $e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$ şi convergenta este uniformă (Vezi [10], 3.6.1), rezultă că $\left(e^{Ax}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot A \cdot (Ax)^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ax)^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{Ax}$. Aşadar, avem

$$\left(e^{Ax}\right)' = Ae^{Ax}, \; x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Teorema 7.5.2 *Soluția generală a sistemului* (20) *este:*

$$Y = e^{Ax}C \tag{22}$$

unde $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ este un vector constant oarecare ($C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$).

Demonstrație.

Din (21) rezultă imediat că $\frac{dY}{dx} = Ae^{Ax}C$. Înlocuind în (20) obținem identitatea $Ae^{Ax}C = Ae^{Ax} \cdot C$, deci (22) este soluție pentru (20).

Exemplul 7.5.1 Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 + 2x + 3 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 + 4x - 1 \end{cases} \tag{23}$$

Sistemul omogen asociat este:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 \end{cases} \tag{24}$$

Conform Teoremei 7.5.2, soluția generală a sistemului (24) este $Y = e^{Ax}C$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Matricea e^{Ax} se calculează ușor dacă matricea A se poate aduce la forma diagonală. În cazul nostru acest lucru este posibil. Într-adevăr, valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$.

Cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$, există o bază formată din vectori proprii. O astfel de bază este $v_1 = (1,4)$, $v_2 = (1,1)$.

Matricea de trecere de la baza canonică la această nouă bază este:
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, iar $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. În raport cu noua bază, matricea A are forma diagonală $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Din proprietățile funcției $A \to e^A$ (Vezi (10), 3.6.2) rezultă că

$$e^{Dx} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ și } e^{Ax} = T \cdot e^{Dx} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \\ -\frac{4}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului omogen (24) este:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = e^{Ax}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}C_1e^{-x} + \frac{1}{3}C_2e^{2x} - \frac{1}{3}C_2e^{-x} \\ -\frac{4}{3}C_1e^{2x} + \frac{4}{3}C_1e^{-x} + \frac{4}{3}C_2e^{2x} - \frac{1}{3}C_2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dacă introducem notațiile $K_1 = \dfrac{C_2 - C_1}{3}$, $K_2 = \dfrac{4C_1 - C_2}{3}$, rezultă

$$\begin{cases} y_{10} = K_1e^{2x} + K_2e^{-x} \\ y_{20} = 4K_1e^{2x} + K_2e^{-x} \end{cases} \tag{25}$$

((25) reprezintă soluția generală a sistemului omogen (24)).

Pentru a găsi soluția sistemului neomogen, folosim metoda variației constantelor a lui Lagrange.

Căutăm soluția sistemului neomogen de forma:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x)\,e^{2x} + \varphi_2(x)\,e^{-x} \\ y_2 = 4\varphi_1(x)\,e^{2x} + \varphi_2(x)e^{-x} \end{cases} \tag{26}$$

Funcțiile φ_1' şi φ_2' verifică sistemul:

$$\begin{cases} \varphi'_1(x)\,e^{2x} + \varphi'_2(x)\,e^{-x} = 2x + 3 \\ 4\varphi'_1(x)\,e^{2x} + \varphi'_2(x)e^{-x} = 4x - 1. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem: $\varphi'_1(x) = \dfrac{2x-4}{3}e^{-2x}$, $\varphi'_2(x) = \dfrac{4x+13}{3}e^{x}$ şi mai departe:

$$\varphi_1(x) = \frac{-2x+3}{6}e^{-2x} + C_1\,,\ \varphi_2(x) = \frac{4x+9}{3}e^{x} + C_2 \tag{27}$$

Înlocuind (27) în (26), rezultă soluția generală a sistemului (23):

$$\begin{cases} y_1 = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x} + x + \dfrac{7}{2} \\ y_2 = 4C_1\,e^{2x} + C_2e^{-x} + 5\,. \end{cases}$$

Observația 7.5.5 La acelaşi rezultat se ajunge şi dacă se foloseşte metoda eliminării, care constă în următoarele:

Se derivează una din ecuațiile sistemului (23), de exemplu prima şi se elimină y_2 şi y_2' din ecuațiile sistemului şi din ecuația derivată, obținându-se în final o ecuație diferențială liniară de ordinul doi, cu coeficienți constanți în necunoscuta y_1. Să reluăm, folosind metoda eliminării, rezolvarea sistemului (23):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -2\,y_1 + y_2 + 2x + 3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4\,y_1 + 3y_2 + 4x - 1\,. \end{cases}$$

Derivând prima ecuaţie obţinem:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -2\frac{d\,y_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + 2 \tag{28}$$

Din prima ecuaţie a sistemului deducem că

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3 \tag{29}$$

Ţinând seama de a doua ecuaţie a sistemului rezultă:

$$\frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3\left(\frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3\right) + 4x - 1 \quad \text{şi mai departe}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3\frac{dy_1}{dx} - 2x - 10\,. \tag{30}$$

Înlocuind (30) în (28), obţinem următoarea ecuaţie de ordinul doi:

$$y''_1 - y'_1 - 2y_1 = -2x - 8 \tag{31}$$

Ecuaţia omogenă asociată este $y''_1 - y'_1 - 2y_1 = 0$, iar ecuaţia sa caracteristică este $r^2 - r - 2 = 0$. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $r_1 = 2$, $r_2 = -1$, deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y_{10} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

Căutăm o soluţie a ecuaţiei neomogene (31) de forma membrului drept (pentru că nu avem rezonanţă)

$$y_{1p} = ax + b \tag{32}$$

Punând condiţia ca (32) să verifice ecuaţia (31), obţinem $a = 1$; $b = \frac{7}{2}$.

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei (31) este

$$y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + x + \frac{7}{2} \tag{33}$$

Înlocuind (33) în (29) rezultă că: $y_2 = 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + 5$.

Aşadar, soluţia sistemului (23) este:

$$\begin{cases} y_1 = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x} + x + \dfrac{7}{2} \\ y_2 = 4C_1\,e^{2x} + C_2e^{-x} + 5\,, \end{cases}$$

aceeaşi soluţie ca şi cea obţinută cu metoda matricială.

Observaţia 7.5.6 Metoda matricială pentru rezolvarea sistemelor liniare omogene cu coeficienţi constanţi se aplică şi în cazul când matricea A nu se poate diagonaliza, folosindu-se în acest caz pentru calculul matricei e^{Ax} forma canonică Jordan a lui A. Pentru detalii vezi [13].

7.6. SISTEME AUTONOME. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

Prin sistem de ecuații diferențiale autonome, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(y_1, \ldots, y_n\right) \\ ------------- \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(y_1, \ldots, y_n\right) \end{cases} \tag{1}$$

unde f_i sunt funcții continue pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$. Se observă că în cazul sistemelor autonome, variabila independentă x nu apare printre argumentele funcțiilor f_i.

Definiția 7.6.1 *O funcție* $\psi : D \to \mathbb{R}$ *se numește integrală primă pentru sistemul* (1) *dacă:*

a) $\psi \in C^1(D)$;

b) ψ *nu este o funcție constantă pe* D;

c) *Pentru orice soluție* $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ *a sistemului* (1), *există o constantă* $c \in \mathbb{R}$, *care depinde de această soluție, astfel încât* $\psi\left[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right] = c$, $\forall\ t \in I$.

Exemplul 7.6.1 Fie sistemul autonom

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1, \quad \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Folosind metoda eliminării se obține imediat soluția generală a sistemului (2), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases} \tag{3}$$

Observăm că funcția $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $\psi\left(y_1, y_2\right) = y_1^2 + y_2^2$, $\forall\ \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{R}^2$ este o integrală primă pentru sistemul (2). Într-adevăr,

$$\psi\left[C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x\right] = C_1^2 + C_2^2 = \text{constant}.$$

Teorema 7.6.1 *Dacă* f_i *sunt continue și lipschitziene pe D, atunci o funcție* $\psi \in C^1(D)$ *este integrală primă pentru sistemul* (1) *dacă și numai dacă:*

$$f_1\left(y\right) \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\left(y\right) + \ldots + f_n\left(y\right) \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\left(y\right) = 0, \quad \forall\ \ y = \left(y_1, \ldots, y_n\right) \in D. \tag{4}$$

Demonstrație

Necesitatea. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0}) \in D$ oarecare fixat.

Din Teorema de existență şi unicitate pentru sisteme, rezultă că există o soluție unică a sistemului (1), $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, cu proprietatea: $\varphi_1(x_0) = y_{10}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$.

Dacă $\psi : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pentru (1), atunci

$$\psi[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = C, \ \forall \ x \in I. \tag{5}$$

Derivând (5) rezultă:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = 0, \ \forall \ x \in I.$$

Ținând seama că $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ verifică sistemul (1), mai departe avem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot f_1[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] + \dots$$
$$+ \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot f_n[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = 0, \ \forall \ x \in I.$$

În particular, pentru $x = x_0$ rezultă $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y_0) f_1(y_0) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y_0) f_n(y_0) = 0$. Cum $y_0 \in D$ a fost arbitrar, rezultă că ψ verifică (4) pe D.

Suficiența. Fie $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ o soluție oarecare a sistemului (1). Atunci $(\varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)) \in D$, $\forall \ x \in I$ şi

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = f_1[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)], \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = f_n[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)], \ \forall \ x \in I.$$

Dacă $\psi \in C^1(D)$ verifică (4) pentru $\forall \ y \in D$, atunci avem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_n}{dx} = 0, \ \forall \ x \in I,$$

relație echivalentă cu $\frac{d}{dx}\psi[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = 0$, $\forall \ x \in I$,

de unde rezultă că $\psi[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = c$, $\forall \ x \in I$.

Aşadar, ψ este integrală primă pentru sistemul (1).

Teorema 7.6.2 *Presupunem că $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt continue, lipschitziene şi $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(y) \neq 0$, $\forall \ y \in D$.*

Atunci, sistemul (1) admite cel mult $(n - 1)$ integrale prime independente.

Demonstrație. Presupunem $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ sunt integrale prime pentru sistemul (1). Din Teorema 7.6.1 rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(y) f_1(y) + \dots + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n}(y) f_n(y) = 0 \\ ------------------------ \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(y) f_1(y) + \dots + \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_n}(y) f_n(y) = 0 \end{cases}, \ \forall \ y \in D. \tag{6}$$

Am obținut un sistem (algebric) liniar și omogen în necunoscutele $f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)$. Deoarece sistemul admite soluții nebanale, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Așadar avem:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n}(y) \\ ------ & ------ & ------ \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(y) & \dots & \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_n}(y) \end{vmatrix} = 0, \ \forall \ y \in D.$$

Din Teorema 4.11.2 din [10] rezultă că Ψ_1, ..., Ψ_n sunt dependente funcțional pe D.

Observația 7.6.1 În condițiile Teoremei 7.6.2 se poate arăta că sistemul (1) admite $(n - 1)$ integrale prime independente funcțional pe D. Ținând seama și de Teorema 7.6.2, rezultă că sistemul (1) admite $(n - 1)$ integrale prime independente și $(n - 1)$ este numărul maxim de integrale prime independente ale sistemului (1).

În continuarea acestui paragraf vom presupune că funcțiile f_i satisfac condițiile din Teorema 7.6.2.

Sistemul (1) se poate pune sub forma simetrică echivalentă:

$$\frac{y_1'}{f_1(y_1, \dots, y_n)} = \frac{y_2'}{f_2(y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{y_n'}{f_n(y_1, \dots, y_n)} = 1. \tag{7}$$

Prin combinație integrabilă a sistemului (6), se înțelege o ecuație diferențială, consecință a sistemului (7), ușor de integrat. Metoda combinațiilor integrabile este folosită pentru aflarea integralelor prime ale sistemului.

Exemplul 7.6.2 Să se afle două integrale prime independente ale sistemului:

$$\frac{y_1'}{y_2 - y_3} = \frac{y_2'}{y_3 - y_1} = \frac{y_3'}{y_1 - y_2} \tag{8}$$

Din proprietățile unui șir de rapoarte egale deducem: $\dfrac{y_1' + y_2'}{y_2 - y_1} = \dfrac{y_3'}{y_1 - y_2}$.

După simplificare rezultă: $\dfrac{d}{dx}(y_1 + y_2 + y_3) = 0$, deci $y_1 + y_2 + y_3 = C_1$.

Funcția $\psi_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3$ este integrală primă pentru (8). Pentru a obține o altă integrală primă facem următoarea combinație integrală:

Amplificăm succesiv primul raport cu y_1, al doilea cu y_2, al treilea cu y_3 şi folosind proprietățile rapoartelor egale obținem: $\dfrac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{y_2 y_3 - y_1 y_3} = \dfrac{y_3 y_3'}{y_1 y_3 - y_2 y_3}$.

După ce simplificăm obținem $\dfrac{d}{dx}\left(y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3'\right) = 0$, deci $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2$.

Funcția $\psi_1\left(y_1, y_2, y_3\right) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ este integrală primă pentru sistemul (8).

Prin ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară se înțelege o ecuație de forma:

$$P_1\left(x_1,\dots,x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + P_n\left(x_1,\dots,x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 . \tag{9}$$

unde P_i sunt funcții continue şi lipschitziene pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x) \neq 0$, $\forall\, x = \left(x_1,\dots,x_n\right) \in D$. Funcția $u = u\left(x_1,\dots,x_n\right)$ este funcția necunoscută.

Definiția 7.6.2 *Se numeşte soluție a ecuației* (9) *orice funcție* φ *definită pe o submulțime deschisă* $D_1 \subset D$, $\varphi \in C^1\left(D_1\right)$ *cu proprietatea:*

$$P_1(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + P_n(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = 0 ,\ \forall\ x = \left(x_1,\dots,x_n\right) \in D_1 .$$

Ecuației cu derivate parțiale (9) i se asociază sistemul simetric următor:

$$\frac{x_1'}{P_1(x)} = \frac{x_2'}{P_2(x)} = \dots = \frac{x_n'}{P_n(x)} = 1 . \tag{10}$$

Observația 7.6.2 Din Teorema 7.6.2 rezultă că orice integrală primă a sistemului (10) este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale (9). Mai general, are loc următoarea teoremă:

Teorema 7.6.3 *Fie* $\psi_1,\dots,\psi_k$ *integrale prime pentru sistemul* (10) *şi fie* Φ *o funcție de clasă* C^1 *definită pe mulțimea deschisă* $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. *Atunci funcția* $u(x) = \Phi\left[\psi_1(x),\dots,\psi_k(x)\right]$, $\forall\ x \in D_1 \subset D$, *este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale* (9).

(Se subînțelege că se presupune că $\left(\psi_1(x),\dots,\psi_k(x)\right) \in \Omega$, $\forall\ x \in D_1$).

Demonstrație. Pentru orice $x \in D_1$ avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \dfrac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) \\ ------------------------------ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) + \ldots + \dfrac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \quad , \quad y = (\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)) \in \Omega \end{cases} \tag{11}$$

Ținând seama de (11) și de Observația 7.6.2 deducem:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \left[P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \right] + \ldots$$

$$+ \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \left[P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \right] = 0 \, , \ \forall \ \ x \in D_1 \, .$$

Așadar, $u = \Phi[\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)]$, $x \in D_1$ este soluție a ecuației (9), $\forall \ k \in \mathbb{N}^*$.

Următoarea teoremă ne arată că orice soluție a ecuației (9) este de această formă.

Teorema 7.6.4 *Fie* $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, $(n-1)$ *integrale prime independente ale sistemului* (10) *și fie* $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_1 \subset D$ *o soluție oarecare a ecuației* (9). *Atunci există o funcție* Φ *de clasă* C^1 *pe o mulțime deschisă* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *astfel încât* $(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)) \in \Omega$, $\forall \ \ x \in D_1$ *și*
$\varphi(x) = \Phi[\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)]$, $\forall \ x \in D_1$.

Demonstrație. Deoarece $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt soluții pentru (9), rezultă:

$$\begin{cases} P_1(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = 0 \\ P_1(x) \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) = 0 \\ ---------------------------- \\ P_1(x) \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) = 0 \quad , \ \forall \ x \in D_1 \end{cases} \tag{12}$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x) \neq 0$, $\forall \ \ x \in D_1$, rezultă că sistemul liniar și omogen (12) admite soluții nebanale pentru orice $x \in D_1$, deci determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \\ \hdashline \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall\, x \in D_1 .$$

Cum prin ipoteză funcțiile $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ sunt independente funcțional, rezultă că:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \\ \hdashline \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = n-1, \quad \forall\, x \in D_1 .$$

Din Teorema 4.11.2 din [10] rezultă că φ depinde funcțional de $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ pe D_1, deci că există $\Phi \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ astfel încât

$\varphi(x) = \Phi\left[\psi_1(x), \dots, \psi_{n-1}(x)\right]$, $\forall\, x \in D_1$.

Exemplul 7.6.3 Să se afle soluția generală a ecuației:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 .$$

Sistemul simetric asociat este:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}}, \quad xyz \neq 0.$$

Din $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ deducem $\frac{y}{x} = C_1$, deci $\psi_1(x,y,z) = \frac{y}{x}$ este o integrală primă. Pentru a obține o a doua integrală primă procedăm astfel: amplificăm primul raport cu *x*, al doilea raport cu *y* şi folosim proprietățile rapoartelor egale. Rezultă

$$\frac{xx' + yy'}{x^2+y^2} = \frac{zz'}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ şi mai departe } \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = zz',$$

egalitate echivalentă cu $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \left(\frac{z^2}{2}\right)'$. Integrând rezultă $\sqrt{x^2+y^2} - \frac{z^2}{2} = C_2$,

deci $\psi_2(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{z^2}{2}$, este integrală primă.

Soluția generală a ecuației va fi: $u(x,y,z)=\Phi\left(\dfrac{y}{x},\ \sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{z^2}{2}\right)$, unde $\Phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcție arbitrară, iar $xyz\neq 0$.

Definiția 7.6.3 *Fie* $a\in\mathbb{R}$ *și* $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ *o mulțime deschisă cu proprietatea* $(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\in D$, $\forall\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$. *Fie de asemenea* $g:A\to\mathbb{R}$ *o funcție de clasă* C^1. *Problema Cauchy pentru ecuația* (9) *și funcția g constă în determinarea unei soluții* $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ *ale ecuației* (9) *care satisface următoarea condiție pe mulțimea A*:

$$u(x_1,\ldots,x_{n-1},a)=g(x_1,\ldots,x_{n-1}) \tag{13}$$

În cazul $n=2$ problema Cauchy are o interpretare geometrică simplă: să se găsească suprafața $z=z(x,y)$ [soluție a ecuației $P(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$] care trece prin curba $y=a$, $z=g(x)$.

Teorema 7.6.5 *Dacă există* $(n-1)$ *integrale prime independente ale sistemului simetric asociat* (10), *atunci problema Cauchy* (9) *și* (13) *are o soluție unică* $u:D_1\to\mathbb{R}$, $D_1\subset D$.

Demonstrație.

Fie $a\in\mathbb{R}$, $g\in C^1(A)$, $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ deschisă cu proprietatea că $(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\in D$, $\forall\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$.

Fie $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$, $(n-1)$ integrale prime independente funcțional pe *D*.

Rezultă că $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\neq 0$, $\forall\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$.

Fie $F:A\subset\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ definită astfel:

$F(x_1,\ldots,x_{n-1})=\left(\varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},a),\ldots,\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\right)$, $(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$.

Din Teorema de inversiune locală (Teorema 4.8.2 din [10]) rezultă că $\forall\ M(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$, există o vecinătate deschisă A_1 a punctului *M*, $A_1\subset A$ și o vecinătate deschisă B_1 a punctului *F*(*M*), astfel încât $F:A_1\to B_1$ este difeomorfism.

Fie $F^{-1}=(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}):B_1\to A_1$, inversa funcției $F:A_1\to B_1$.

Definim

$u(x)=g\left[\omega_1\left(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x)\right),\ldots,\omega_{n-1}\left(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x)\right)\right]$,

$$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in D \tag{14}$$

cu proprietatea că $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A_1$.

Din Teorema 7.6.3 rezultă că funcția definită în (14) este soluție pentru (9).

Pe de altă parte, observăm că $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) = g\left[\left(F^{-1} \circ F\right)(x_1, \ldots, x_{n-1})\right] = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$, oricare ar fi $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A_1$, deci funcția definită în (14) este soluția problemei Cauchy (9)+(13). Unicitatea rezultă din unicitatea funcțiilor $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$.

Exemplul 7.6.4 Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \ x > 0 \\ y = 0, \ z = x\,. \end{cases}$$

Sistemul simetric este $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$ sau $xx' + yy' = 0$, de unde rezultă integrala primă $x^2 + y^2 = c$. Soluția generală este $z = \phi\left(x^2 + y^2\right)$, unde ϕ este o funcție arbitrară de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$. Din relațiile $x^2 + y^2 = c$, $y = 0$, $z = x$ deducem $x = \sqrt{c}$ și mai departe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Așadar, soluția problemei Cauchy este $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x > 0$.

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară este de forma:

$$P_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, u) \tag{15}$$

unde P_i sunt funcții continue și lipschitziene pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ și $\sum_{i=1}^{n+1} P_i^2 \neq 0$ pe D. Căutăm soluția ecuației (15) sub forma funcției implicite $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, definită de ecuația $V(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$, unde V este o funcție de clasă C^1 pe D și $\dfrac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ pe D.

Din Teorema funcțiilor implicite rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \ \ i = \overline{1, n} \tag{16}$$

Înlocuind (16) în (15) rezultă:

$$P_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{17}$$

Am obținut astfel o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară. Soluția ecuației (17) este de forma $V = \phi\left[\varphi_1\left(x_1,\ldots,x_n,u\right),\ldots,\varphi_n\left(x_1,\ldots,x_n,u\right)\right]$, $\left(x_1,\ldots,x_n,u\right)\in\Omega$, unde $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ sunt n integrale prime independente ale sistemului $\dfrac{x_1'}{P_1}=\ldots=\dfrac{x_n'}{P_n}=\dfrac{u'}{P_{n+1}}$.

Exemplul 7.6.5 Să se afle soluția generală a ecuației $2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+3x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}+6x^2y=0$ şi apoi să se rezolve problema Cauchy $x = 0$; $y^2 = 2z$.

Sistemul simetric ataşat este: $\dfrac{x'}{2y}=\dfrac{y'}{3x^2}=\dfrac{z'}{-6x^2y}=1$.

Din $3x^2x' = 2yy'$ deducem $x^3 - y^2 = C_1$.

Din $3x^2x' = -z'$ deducem $x^3 + z = C_2$.

Soluția generală a ecuației este funcția $z = z\left(x,y\right)$ definită implicit de ecuația $\phi\left(x^3-y^2,\, x^3+z\right)=0$, unde $\phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcție arbitrară. Pentru a rezolva problema Cauchy eliminăm variabilele x, y, z între relațiile:

$$\begin{cases} x^3-y^2=C_1 \\ x^3+z=C_2 \\ x=0 \\ y^2=2z \end{cases}$$

şi obținem $C_1+2C_2=0$. Înlocuind C_1 şi C_2 cu expresiile din membrul stâng, obținem: $x^3-y^2+2\,x^3+2z=0$. Rezultă că

$z=\dfrac{1}{2}\left(y^2-3x^3\right)$ este soluția problemei Cauchy.